

线性方程组和矩阵

秦加俊

2026 年 6 月 20 日

1 线性方程组

例题 1.1: 两类特殊线性方程组 解线性方程组:

(1)

$$\begin{cases} (1+a_1)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_1, \\ x_1 + (1+a_2)x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_2, \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + (1+a_n)x_n = b_n, \end{cases}$$

其中

$$a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0, \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \neq -1.$$

(2)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = b_1, \\ nx_1 + x_2 + 2x_3 + \cdots + (n-2)x_{n-1} + (n-1)x_n = b_2, \\ \vdots \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \cdots + nx_{n-1} + x_n = b_n. \end{cases}$$

解答. (1) 记

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

第 i 个方程可以写成

$$a_i x_i + S = b_i.$$

因为 $a_i \neq 0$, 所以

$$x_i = \frac{b_i - S}{a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

两边对 i 求和, 得到

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{b_i - S}{a_i} = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i} - S \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}.$$

因此

$$S \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i}.$$

由题设

$$1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \neq 0,$$

所以

$$S = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{b_j}{a_j}}{1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j}}.$$

于是原方程组的解为

$$x_i = \frac{1}{a_i} \left(b_i - \frac{\sum_{j=1}^n \frac{b_j}{a_j}}{1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(2) 记第 i 个方程为 (E_i) , 并约定

$$b_{n+1} = b_1.$$

令

$$S = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

用第 i 个方程减去第 $i+1$ 个方程, 得到

$$S - nx_i = b_i - b_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

因此

$$x_i = \frac{S - b_i + b_{i+1}}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

下面求 S 。把所有方程相加。注意每个未知数 x_j 的系数总和都是

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

所以

$$\frac{n(n+1)}{2} S = \sum_{i=1}^n b_i.$$

因此

$$S = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n b_j.$$

代回得

$$x_i = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n b_j - b_i + b_{i+1} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中约定 $b_{n+1} = b_1$ 。

□

例题 1.2: 含参数线性方程组的解的情况 当 a 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$$

无解、有唯一解和有无穷多解? 并在有无穷多解时求出其通解。

解答. 系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = (a-1)E_3 + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

该矩阵在向量 $(1, 1, 1)^T$ 方向上的特征值为

$$a + 2,$$

在与 $(1, 1, 1)^T$ 正交的二维子空间上的特征值为

$$a - 1.$$

因此

$$\det A = (a-1)^2(a+2).$$

所以当

$$a \neq 1, -2$$

时, 系数矩阵可逆, 方程组有唯一解。

下面讨论 $a = 1$ 和 $a = -2$ 两种奇异情形。

当 $a = 1$ 时, 方程组变为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

所以有无穷多解, 通解为

$$\boxed{x_1 = s, \quad x_2 = t, \quad x_3 = 1 - s - t, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

当 $a = -2$ 时, 系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

它的零空间由 $(1, 1, 1)^T$ 张成, 因此其列空间为

$$\{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 + y_2 + y_3 = 0\}.$$

但此时右端向量为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

其分量和为

$$1 - 2 + 4 = 3 \neq 0.$$

所以右端向量不在列空间中，方程组无解。

综上：

$$\begin{cases} a = -2, & \text{无解;} \\ a = 1, & \text{有无穷多解;} \\ a \neq 1, -2, & \text{有唯一解.} \end{cases}$$

□

2 矩阵

例题 2.1: 矩阵恒等式: $E_n - AB$ 与 $E_m - BA$ 设 A 为 $n \times m$ 矩阵, B 为 $m \times n$ 矩阵。如果 $E_n - AB$ 可逆, 证明: $E_m - BA$ 也可逆, 并求

$$(E_m - BA)^{-1}.$$

解答. 我们猜测

$$(E_m - BA)^{-1} = E_m + B(E_n - AB)^{-1}A.$$

下面验证它确实是逆矩阵。

首先计算右乘：

$$\begin{aligned} & (E_m - BA) [E_m + B(E_n - AB)^{-1}A] \\ &= E_m - BA + B(E_n - AB)^{-1}A - BAB(E_n - AB)^{-1}A \\ &= E_m - BA + BE_n - AB^{-1}A \\ &= E_m - BA + BA \\ &= E_m. \end{aligned}$$

因此

$$E_m + B(E_n - AB)^{-1}A$$

是 $E_m - BA$ 的右逆。

同理计算左乘：

$$\begin{aligned}
 & [E_m + B(E_n - AB)^{-1}A](E_m - BA) \\
 &= E_m - BA + B(E_n - AB)^{-1}A - B(E_n - AB)^{-1}ABA \\
 &= E_m - BA + B(E_n - AB)^{-1}(E_n - AB)A \\
 &= E_m - BA + BA \\
 &= E_m.
 \end{aligned}$$

所以它也是左逆。于是 $E_m - BA$ 可逆，并且

$$(E_m - BA)^{-1} = E_m + B(E_n - AB)^{-1}A.$$

□

3 逆矩阵的计算

例题 3.1: 若干特殊矩阵的逆矩阵 求下列矩阵的逆矩阵：

(1)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ 1 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}_{n \times n};$$

(2)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad n \geq 2;$$

(3)

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad n \geq 2;$$

(4)

$$A_4 = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \begin{cases} b^{j-i}, & j \geq i, \\ 0, & j < i; \end{cases}$$

(5)

$$A_5 = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \begin{cases} j - i + 1, & j \geq i, \\ 0, & j < i; \end{cases}$$

(6)

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad a \neq 1, \quad a \neq \frac{1}{1-n};$$

(7)

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix},$$

其中

$$a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0, \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \neq -1;$$

(8)

$$A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix};$$

(9)

$$A_9 = \begin{pmatrix} a & a+1 & \cdots & a+n-2 & a+n-1 \\ a+n-1 & a & \cdots & a+n-3 & a+n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a+2 & a+3 & \cdots & a & a+1 \\ a+1 & a+2 & \cdots & a+n-1 & a \end{pmatrix}, \quad a \neq \frac{1-n}{2};$$

(10)

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad n \geq 2;$$

(11)

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \cdots & \zeta^{n-1} \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \cdots & \zeta^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{n-1} & \zeta^{2(n-1)} & \cdots & \zeta^{(n-1)^2} \end{pmatrix}, \quad \zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

解答. 下面分别计算。

(1) 记 L 为下移矩阵, 即

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & \end{pmatrix}.$$

则

$$A_1 = 2E_n + L = 2\left(E_n + \frac{1}{2}L\right).$$

因为 $L^n = O$, 所以

$$A_1^{-1} = \frac{1}{2}\left(E_n - \frac{1}{2}L + \frac{1}{2^2}L^2 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}L^{n-1}\right).$$

即

$$(A_1^{-1})_{ij} = \begin{cases} \frac{(-1)^{i-j}}{2^{i-j+1}}, & i \geq j, \\ 0, & i < j. \end{cases}$$

(2) 设 J_n 为全 1 矩阵, 则

$$A_2 = J_n - E_n.$$

因为

$$J_n^2 = nJ_n,$$

可直接验证

$$(J_n - E_n)\left(-E_n + \frac{1}{n-1}J_n\right) = E_n.$$

所以

$$\boxed{A_2^{-1} = -E_n + \frac{1}{n-1}J_n.}$$

(3) 将矩阵按第一行第一列分块, 记 $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{n-1}$, 则

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & J_{n-1} - E_{n-1} \end{pmatrix}.$$

直接验证可得

$$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 2-n & \mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & -E_{n-1} \end{pmatrix}.$$

也就是说

$$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

(4) 记 N 为上移矩阵, 即

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \end{pmatrix}.$$

则

$$A_4 = E_n + bN + b^2N^2 + \cdots + b^{n-1}N^{n-1}.$$

因为 $N^n = O$, 所以

$$A_4 = (E_n - bN)^{-1}.$$

因此

$$A_4^{-1} = E_n - bN.$$

即 A_4^{-1} 的主对角元全为 1, 第一上对角元全为 $-b$, 其余元素全为 0。

(5) 仍记 N 为上移矩阵。则

$$A_5 = E_n + 2N + 3N^2 + \cdots + nN^{n-1}.$$

由

$$(E_n - N)^{-2} = E_n + 2N + 3N^2 + \cdots + nN^{n-1}$$

可知

$$A_5 = (E_n - N)^{-2}.$$

因此

$$A_5^{-1} = (E_n - N)^2 = E_n - 2N + N^2.$$

即 A_5^{-1} 的主对角元为 1, 第一上对角元为 -2 , 第二上对角元为 1, 其余元素为 0。

(6) 设 J_n 为全 1 矩阵, 则

$$A_6 = (1-a)E_n + aJ_n.$$

利用 $J_n^2 = nJ_n$, 可设

$$A_6^{-1} = xE_n + yJ_n.$$

由

$$((1-a)E_n + aJ_n)(xE_n + yJ_n) = E_n$$

比较 E_n 与 J_n 的系数, 得

$$x = \frac{1}{1-a}, \quad y = -\frac{a}{(1-a)(1+(n-1)a)}.$$

所以

$$A_6^{-1} = \frac{1}{1-a}E_n - \frac{a}{(1-a)(1+(n-1)a)}J_n.$$

(7) 设

$$D = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad J_n = \mathbf{e}\mathbf{e}^T.$$

则

$$A_7 = D + J_n.$$

令

$$s = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}.$$

由题设 $s \neq 0$. 根据秩一扰动公式,

$$A_7^{-1} = D^{-1} - \frac{D^{-1}\mathbf{e}\mathbf{e}^T D^{-1}}{1 + \mathbf{e}^T D^{-1}\mathbf{e}}.$$

即

$$(A_7^{-1})_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{a_i} - \frac{1}{s a_i a_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

(8) 令 P 为循环上移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

则

$$A_8 = E_n + 2P + 3P^2 + \cdots + nP^{n-1}.$$

注意

$$P^n = E_n, \quad E_n + P + \cdots + P^{n-1} = J_n.$$

计算得

$$A_8(P - E_n) = nE_n - J_n.$$

又因为

$$A_8 J_n = \frac{n(n+1)}{2} J_n,$$

所以

$$A_8 \left[\frac{1}{n}(P - E_n) + \frac{2}{n^2(n+1)}J_n \right] = E_n.$$

因此

$$A_8^{-1} = \frac{1}{n}(P - E_n) + \frac{2}{n^2(n+1)}J_n.$$

(9) 由第 (8) 问的记号, 设

$$A_9 = A_8 + (a-1)J_n.$$

因为 $J_n(P - E_n) = O$, 并且

$$A_9 J_n = \left(na + \frac{n(n-1)}{2} \right) J_n = \frac{n(2a+n-1)}{2} J_n,$$

所以

$$A_9 \left[\frac{1}{n}(P - E_n) + \frac{2}{n^2(2a+n-1)}J_n \right] = E_n.$$

因此

$$A_9^{-1} = \frac{1}{n}(P - E_n) + \frac{2}{n^2(2a+n-1)}J_n.$$

(10) 设 $A_{10}^{-1} = (c_{ij})$ 。则

$$c_{ij} = \frac{\min\{i, j\}(n+1 - \max\{i, j\})}{n+1}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

即

$$A_{10}^{-1} = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-1 & 2(n-1) & 2(n-2) & \cdots & 2 \\ n-2 & 2(n-2) & 3(n-2) & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

这个公式可由直接代入

$$2c_{ij} - c_{i-1,j} - c_{i+1,j} = \delta_{ij}, \quad c_{0j} = c_{n+1,j} = 0$$

验证得到。

(11) 这是 Fourier 矩阵。记

$$A_{11} = (\zeta^{-(p-1)(q-1)})_{p,q=1}^n.$$

利用单位根求和公式

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{mk} = \begin{cases} n, & n \mid m, \\ 0, & n \nmid m, \end{cases}$$

可得

$$A_{11} \left(\frac{1}{n} (\zeta^{-(p-1)(q-1)})_{p,q=1}^n \right) = E_n.$$

因此

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{n} (\zeta^{-(p-1)(q-1)})_{p,q=1}^n.$$

□

例题 3.2: 方阵的可逆矩阵与幂等矩阵分解 设 A 为 n 阶方阵。证明：存在 n 阶方阵 B 和 C ，使得 B 可逆， C 满足

$$C^2 = C,$$

且

$$A = BC.$$

解答. 设

$$\text{rank } A = r.$$

由矩阵的等价标准形，存在可逆矩阵 P, Q ，使得

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q.$$

记

$$D = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

则

$$D^2 = D.$$

令

$$B = PQ, \quad C = Q^{-1}DQ.$$

显然 B 可逆，并且

$$C^2 = Q^{-1}DQQ^{-1}DQ = Q^{-1}D^2Q = Q^{-1}DQ = C.$$

同时

$$BC = PQ \cdot Q^{-1}DQ = PDQ = A.$$

因此存在可逆矩阵 B 与幂等矩阵 C ，使得

$$A = BC.$$

□