

行列式

秦加俊

2026 年 6 月 20 日

1 行列式与代数余子式

例题 1.1: 行列式求导公式 设 n 阶方阵

$$A = (a_{ij})$$

的元素 a_{ij} 都是变量 x 的可微函数, $1 \leq i, j \leq n$ 。证明:

$$\frac{d(\det A)}{dx} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{da_{ij}}{dx} A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是行列式 $\det A$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式。

解答. 把行列式看成其所有元素的函数:

$$\det A = \det(a_{ij}).$$

根据行列式对每一行都是线性的, 且每个元素 a_{ij} 在行列式中都是一次出现的变量, 因此有

$$\frac{\partial(\det A)}{\partial a_{ij}} = A_{ij}.$$

于是由多元函数链式法则,

$$\frac{d(\det A)}{dx} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial(\det A)}{\partial a_{ij}} \frac{da_{ij}}{dx} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} \frac{da_{ij}}{dx}.$$

即

$$\boxed{\frac{d(\det A)}{dx} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{da_{ij}}{dx} A_{ij}.}$$

□

例题 1.2: 所有代数余子式之和的一个表达式 给定 n 阶方阵

$$A = (a_{ij}),$$

证明:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21} - a_{11} & a_{22} - a_{12} & \cdots & a_{2n} - a_{1n} \\ a_{31} - a_{11} & a_{32} - a_{12} & \cdots & a_{3n} - a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - a_{11} & a_{n2} - a_{12} & \cdots & a_{nn} - a_{1n} \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是行列式 $\det A$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式。

解答. 记 A 的第 i 行为

$$r_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}),$$

并记

$$e = (1, 1, \dots, 1).$$

设

$$D_i = \det(r_1, \dots, r_{i-1}, e, r_{i+1}, \dots, r_n),$$

也就是把 $\det A$ 的第 i 行替换成全 1 行所得的行列式。

对 D_i 按第 i 行展开, 注意代数余子式与原行列式相同, 得到

$$D_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

因此

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} = D_1 + D_2 + \cdots + D_n.$$

另一方面, 由行列式的多重线性性,

$$\begin{aligned} & \det(e, r_2 - r_1, r_3 - r_1, \dots, r_n - r_1) \\ &= \det(e, r_2, \dots, r_n) - \sum_{i=2}^n \det(e, r_2, \dots, r_{i-1}, r_1, r_{i+1}, \dots, r_n). \end{aligned}$$

含有两个 r_1 的项都为 0, 所以上式只剩下这些项。

其中

$$\det(e, r_2, \dots, r_n) = D_1.$$

而对 $i \geq 2$, 通过交换行可得

$$-\det(e, r_2, \dots, r_{i-1}, r_1, r_{i+1}, \dots, r_n) = D_i.$$

所以

$$\det(e, r_2 - r_1, r_3 - r_1, \dots, r_n - r_1) = D_1 + D_2 + \cdots + D_n.$$

这正是

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21} - a_{11} & a_{22} - a_{12} & \cdots & a_{2n} - a_{1n} \\ a_{31} - a_{11} & a_{32} - a_{12} & \cdots & a_{3n} - a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - a_{11} & a_{n2} - a_{12} & \cdots & a_{nn} - a_{1n} \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij}.$$

证明完毕。 $\square$

例题 1.3: 某一行全为 1 时的代数余子式之和 证明: 如果 n 阶行列式 D 的某一行或某一列的所有元素都是 1, 则 D 的所有元素的代数余子式之和等于 D 。

解答. 只证明某一行全为 1 的情形; 某一列全为 1 的情形完全类似, 或者对转置行列式应用下面的结论即可。

不妨设 $D = \det A$, 且 A 的第一行为

$$(1, 1, \dots, 1).$$

由上一题,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21} - a_{11} & a_{22} - a_{12} & \cdots & a_{2n} - a_{1n} \\ a_{31} - a_{11} & a_{32} - a_{12} & \cdots & a_{3n} - a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - a_{11} & a_{n2} - a_{12} & \cdots & a_{nn} - a_{1n} \end{vmatrix}.$$

由于第一行全为 1, 即

$$a_{11} = a_{12} = \cdots = a_{1n} = 1,$$

所以上式右端就是把原行列式 D 的第 2 行到第 n 行分别减去第一行得到的行列式。该行变换不改变行列式的值, 因此

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} = D.$$

$\square$

例题 1.4: 替换一行得到的行列式之和 用 $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1$ 替换 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

的第 i 行, 得到的行列式记为 D_i , $i = 1, 2, \dots, n$ 。证明:

$$D = D_1 + D_2 + \cdots + D_n.$$

解答. 记 D 的第 i 行为

$$r_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i,n-1}, 1), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

并记

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1).$$

则

$$D = \det(r_1, r_2, \dots, r_n),$$

而

$$D_i = \det(r_1, \dots, r_{i-1}, x, r_{i+1}, \dots, r_n).$$

注意到每个向量 $r_i - x$ 的最后一个分量都是 0, 因此

$$r_1 - x, r_2 - x, \dots, r_n - x$$

都属于 $n-1$ 维子空间

$$\{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n : u_n = 0\}.$$

所以它们线性相关, 从而

$$\det(r_1 - x, r_2 - x, \dots, r_n - x) = 0.$$

对这个行列式按行的多重线性展开. 由于含有两个或两个以上 x 作为行的项都等于 0, 所以只剩下

$$0 = \det(r_1, r_2, \dots, r_n) - \sum_{i=1}^n \det(r_1, \dots, r_{i-1}, x, r_{i+1}, \dots, r_n).$$

也就是

$$0 = D - (D_1 + D_2 + \dots + D_n).$$

因此

$$\boxed{D = D_1 + D_2 + \dots + D_n.}$$

□

例题 1.5: bordered 行列式与代数余子式 给定 n 阶方阵

$$A = (a_{ij}),$$

证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix} = z \det A - \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} x_i y_j,$$

其中 A_{ij} 是行列式 $\det A$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, $1 \leq i, j \leq n$.

解答. 记左端的 $(n+1)$ 阶行列式为 Δ 。对最后一列展开, 得到

$$\Delta = z \det A + \sum_{i=1}^n x_i C_i,$$

其中 C_i 是 Δ 中元素 x_i 的代数余子式。

下面计算 C_i 。删去第 i 行与最后一列后, 所得的 n 阶行列式由 A 中除第 i 行外的各行以及最后一行

$$(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

组成。把这一行从最后一行换到第 i 行, 需要经过 $n-i$ 次相邻行交换。因此

$$C_i = (-1)^{i+n+1} (-1)^{n-i} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 $(y_1, \dots, y_n)$ 位于第 i 行。

由于

$$(-1)^{i+n+1} (-1)^{n-i} = -1,$$

所以

$$C_i = - \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

而这个行列式按第 i 行展开为

$$\sum_{j=1}^n y_j A_{ij}.$$

因此

$$C_i = - \sum_{j=1}^n y_j A_{ij}.$$

代回 Δ , 得到

$$\Delta = z \det A - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j A_{ij} = z \det A - \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} x_i y_j.$$

证明完毕。 $\square$

2 行列式的计算

例题 2.1: 若干常见行列式的计算 计算下列 n 阶行列式:

(1)

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & & \\ 2 & 7 & 5 & \\ & 2 & 7 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 5 \\ & & & 2 & 7 \end{vmatrix};$$

(2)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix};$$

(3)

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & & \\ & a_2 & -a_3 & \\ & & a_3 & \ddots \\ & & & \ddots & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 + a_n \end{vmatrix};$$

(4)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix};$$

(5)

$$D = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix};$$

(6)

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix};$$

(7)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos \theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos \theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix};$$

(8)

$$D = \begin{vmatrix} \sin n\theta_1 & \sin(n-1)\theta_1 & \cdots & \sin \theta_1 \\ \sin n\theta_2 & \sin(n-1)\theta_2 & \cdots & \sin \theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin n\theta_n & \sin(n-1)\theta_n & \cdots & \sin \theta_n \end{vmatrix}.$$

解答. (1) 记该三对角行列式为 D_n , 并约定

$$D_0 = 1, \quad D_1 = 7.$$

按第一行展开, 得到递推式

$$D_n = 7D_{n-1} - 10D_{n-2}.$$

特征方程为

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0,$$

即

$$(\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0.$$

因此

$$D_n = \alpha 5^n + \beta 2^n.$$

由 $D_0 = 1, D_1 = 7$ 解得

$$\alpha = \frac{5}{3}, \quad \beta = -\frac{2}{3}.$$

所以

$$D_n = \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3}.$$

(2) 这是一个缺项 Vandermonde 型行列式。设

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

与标准 Vandermonde 行列式相比, 指数序列

$$0, 1, \dots, n-3, n-1, n$$

相当于缺少 $n-2$, 加入 n 。因此它等于 Vandermonde 行列式乘以二次基本对称多项式

$$e_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

所以

$$D = \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

(3) 对最后一行展开较方便。记 C_i 为最后一行第 i 个元素的代数余子式。由前 $n-1$ 行的结构可知

$$a_i C_i = a_{i+1} C_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

又

$$C_n = a_1 a_2 \cdots a_{n-1}.$$

因此

$$C_i = \prod_{k \neq i} a_k, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

所以

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^{n-1} C_i + (1 + a_n) C_n \\ &= \sum_{i=1}^n \prod_{k \neq i} a_k + \prod_{k=1}^n a_k. \end{aligned}$$

即

$$D = \prod_{k=1}^n a_k + \sum_{i=1}^n \prod_{k \neq i} a_k.$$

当 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ 时, 也可写成

$$D = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right).$$

(4) 这是循环矩阵。令

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

该循环矩阵的特征值为

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \omega^{kj}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

当 $k = 0$ 时,

$$\lambda_0 = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

当 $k = 1, 2, \dots, n-1$ 时, 由

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj} = 0$$

以及

$$\sum_{j=0}^{n-1} j \omega^{kj} = -\frac{n}{1 - \omega^k}$$

可得

$$\lambda_k = -\frac{n}{1 - \omega^k}.$$

因此

$$\begin{aligned} D &= \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{n}{1 - \omega^k} \right). \end{aligned}$$

又

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n,$$

所以

$$D = (-1)^{n-1} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

- (5) 记 $e_k = e_k(x_1, \dots, x_n)$ 为 $x_1, \dots, x_n$ 的 k 次基本对称多项式, 并约定 $e_0 = 1$ 。由于每一列是多项式

$$1 + x, \quad 1 + x^2, \quad \dots, \quad 1 + x^n$$

在 $x_1, \dots, x_n$ 处的取值, 行列式必为 Vandermonde 行列式的倍数。

对各列展开时, 若有两列同时取常数项 1, 则出现两列相同, 贡献为 0。因此只需考虑无列取常数项以及恰有一列取常数项的情形。

无列取常数项时, 得到

$$\det(x_i^j)_{1 \leq i, j \leq n} = e_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

若第 k 列取常数项, 则对应指数为

$$0, 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n,$$

得到的对称因子为 e_{n-k} , 并且把常数列移到第一列产生符号 $(-1)^{k-1}$ 。所以

$$D = (e_n + e_{n-1} - e_{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} e_0) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

(6) 这是 Cauchy 行列式。设所有 $a_i + b_j \neq 0$, 且 a_i 两两不同、 b_j 两两不同。则

$$D = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)}.$$

若某两个 a_i 相同或某两个 b_j 相同, 则行列式有两行或两列相同, 上式右端也为 0, 公式仍然成立。

(7) 令

$$t_i = \cos \theta_i.$$

由 Chebyshev 多项式

$$\cos k\theta = T_k(\cos \theta)$$

可知第 $k+1$ 列是 $T_k(t_i)$, 其中 T_k 是 k 次多项式, 且当 $k \geq 1$ 时首项系数为

$$2^{k-1}.$$

因此该行列式等于 Vandermonde 行列式乘以首项系数之积:

$$D = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i).$$

(8) 令

$$t_i = \cos \theta_i.$$

由

$$\sin k\theta = \sin \theta U_{k-1}(\cos \theta)$$

可知, 其中 U_{k-1} 是第二类 Chebyshev 多项式, 次数为 $k-1$, 首项系数为 2^{k-1} 。

从第 i 行提出因子 $\sin \theta_i$, 得到

$$D = \left(\prod_{i=1}^n \sin \theta_i \right) \det(U_{n-j}(t_i))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

由于列的次数从 $n-1$ 递减到 0, 所以

$$D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\prod_{i=1}^n \sin \theta_i \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_i - \cos \theta_j).$$

□

例题 2.2: Vandermonde 行列式的整除性 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是正整数。证明: n 阶行列

式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

能被

$$1^{n-1}2^{n-2}\cdots(n-2)^2(n-1)$$

整除。

解答. 注意

$$1^{n-1}2^{n-2}\cdots(n-2)^2(n-1) = \prod_{k=1}^{n-1} k!.$$

我们证明 D 能被 $\prod_{k=1}^{n-1} k!$ 整除。

将列多项式

$$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$$

通过整数系数的初等列变换, 换成下降阶乘多项式

$$1, x, x(x-1), \dots, x(x-1)\cdots(x-n+2).$$

因为每个下降阶乘多项式

$$x(x-1)\cdots(x-k+1)$$

都是首项系数为 1 的 k 次多项式, 所以这种变换的过渡矩阵是上三角且对角元全为 1, 不改变行列式。

于是

$$D = \begin{vmatrix} 1 & (a_1)_1 & (a_1)_2 & \cdots & (a_1)_{n-1} \\ 1 & (a_2)_1 & (a_2)_2 & \cdots & (a_2)_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (a_n)_1 & (a_n)_2 & \cdots & (a_n)_{n-1} \end{vmatrix},$$

其中

$$(x)_k = x(x-1)\cdots(x-k+1).$$

又有

$$(a_i)_k = k! \binom{a_i}{k}.$$

因此从第 $k+1$ 列提出因子 $k!$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, 得到

$$D = \left(\prod_{k=0}^{n-1} k! \right) \det \left(\binom{a_i}{k} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq k \leq n-1}}.$$

由于 a_i 是正整数, 所以

$$\binom{a_i}{k} \in \mathbb{Z}.$$

故最后一个行列式是整数。于是

$$\prod_{k=0}^{n-1} k! = \prod_{k=1}^{n-1} k! = 1^{n-1} 2^{n-2} \cdots (n-2)^2 (n-1)$$

整除 D 。

□

例题 2.3: Levy–Desplanques 定理 设 n 阶方阵

$$A = (a_{ij})$$

的元素都是复数, 满足

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

则方阵 A 称为主角占优矩阵。证明: 主角占优矩阵的行列式不为零。

解答. 只需证明 A 的零空间为 $\{0\}$ 。

反设存在非零向量

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

使得

$$Ax = 0.$$

取 k , 使得

$$|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

由于 $x \neq 0$, 所以

$$|x_k| > 0.$$

由第 k 个方程

$$a_{kk}x_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj}x_j = 0$$

可得

$$|a_{kk}||x_k| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj}x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}||x_j|.$$

由 $|x_j| \leq |x_k|$, 得到

$$|a_{kk}||x_k| \leq \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \right) |x_k|.$$

因为 $|x_k| > 0$, 所以

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|,$$

这与主角占优条件矛盾。

因此 $Ax = 0$ 只有零解, 所以 A 可逆, 从而

$$\det A \neq 0.$$

□

例题 2.4: Minkowski 型正行列式判别 设 n 阶方阵

$$A = (a_{ij})$$

的元素都是实数, 满足

- (i) $a_{ii} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n;$
- (ii) $a_{ij} < 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n;$
- (iii) $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$

证明:

$$\det A > 0.$$

解答. 由条件 (ii) 和 (iii), 对每个 i 有

$$a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} > 0.$$

因为 $a_{ij} < 0$, 所以

$$a_{ii} > - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

因此 A 是严格行主角占优矩阵。

为了证明行列式为正而不仅仅是非零, 考虑矩阵族

$$A(t) = (a_{ij}(t)), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

其中

$$a_{ii}(t) = a_{ii}, \quad a_{ij}(t) = ta_{ij} \quad (i \neq j).$$

当 $0 \leq t \leq 1$ 时,

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |ta_{ij}|.$$

所以 $A(t)$ 对所有 $t \in [0, 1]$ 都是严格行主角占优矩阵。由 Levy-Desplanques 定理,

$$\det A(t) \neq 0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

另一方面, $\det A(t)$ 是 t 的连续函数, 并且

$$\det A(0) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} > 0.$$

由于连续函数 $\det A(t)$ 在 $[0, 1]$ 上从不为零, 它的符号不能改变。因此

$$\det A(1) > 0.$$

即

$$\boxed{\det A > 0.}$$

□

例题 2.5: 补充行列式计算 求下列行列式的值:

(1)

$$D = \begin{vmatrix} (x - a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x - a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x - a_n)^2 \end{vmatrix};$$

(2)

$$D = \begin{vmatrix} \cos \theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cdots & \cos n\theta \\ \cos n\theta & \cos \theta & \cos 2\theta & \cdots & \cos(n-1)\theta \\ \cos(n-1)\theta & \cos n\theta & \cos \theta & \cdots & \cos(n-2)\theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta & \cdots & \cos \theta \end{vmatrix};$$

(3)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

解答. (1) 记

$$d_j = (x - a_j)^2 - a_j^2 = x(x - 2a_j), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

第 j 列可以写为

$$a_j^2 \mathbf{e} + d_j \mathbf{e}_j,$$

其中

$$\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T,$$

而 e_j 是第 j 个标准单位列向量。

由行列式关于列的多重线性展开。由于若有两列同时取 e 部分，则行列式中出现两列相同，故该项为 0。因此只剩下“所有列都取 $d_j e_j$ ”以及“恰有一列取 $a_i^2 e$ ”的项。

所以

$$\begin{aligned} D &= \prod_{j=1}^n d_j + \sum_{i=1}^n a_i^2 \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} d_j \\ &= \prod_{j=1}^n x(x - 2a_j) + \sum_{i=1}^n a_i^2 \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} x(x - 2a_j). \end{aligned}$$

因此

$$D = x^{n-1} \left[x \prod_{j=1}^n (x - 2a_j) + \sum_{i=1}^n a_i^2 \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (x - 2a_j) \right].$$

(2) 这是循环行列式。令

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

循环矩阵的特征值为

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^n \cos(j\theta) \omega^{k(j-1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

因此

$$D = \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k.$$

下面化简 λ_k 。令 $t = \omega^k$ ，则 $t^n = 1$ ，且

$$\sum_{j=1}^n \cos(j\theta) t^{j-1} = \frac{\cos \theta - \cos(n+1)\theta + t(\cos n\theta - 1)}{1 - 2t \cos \theta + t^2}.$$

于是

$$D = \prod_{t^n=1} \frac{\cos \theta - \cos(n+1)\theta + t(\cos n\theta - 1)}{1 - 2t \cos \theta + t^2}.$$

记

$$A = \cos \theta - \cos(n+1)\theta, \quad B = \cos n\theta - 1.$$

利用

$$\prod_{t^n=1} (A + Bt) = A^n - (-B)^n$$

以及

$$\prod_{t^n=1} (1 - 2t \cos \theta + t^2) = (1 - e^{in\theta})(1 - e^{-in\theta}) = 4 \sin^2 \frac{n\theta}{2},$$

得

$$D = \frac{A^n - (-B)^n}{4 \sin^2 \frac{n\theta}{2}}.$$

又

$$A = 2 \sin \frac{(n+2)\theta}{2} \sin \frac{n\theta}{2}, \quad -B = 2 \sin^2 \frac{n\theta}{2}.$$

因此

$$D = 2^{n-2} \sin^{n-2} \frac{n\theta}{2} \left[\sin^n \frac{(n+2)\theta}{2} - \sin^n \frac{n\theta}{2} \right].$$

上述推导中若出现分母为零的特殊情形, 可由连续性得到同一公式。

(3) 这是缺项 Vandermonde 行列式。设

$$V = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

我们证明

$$D = e_{n-1}(x_1, \dots, x_n)V,$$

其中

$$e_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} x_j$$

是 $n-1$ 次基本对称多项式。

考虑 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \\ 1 & t & t^2 & \cdots & t^n \end{vmatrix} = V \prod_{i=1}^n (t - x_i).$$

比较两边 t 的系数。

右边 t 的系数为

$$(-1)^{n-1} e_{n-1}(x_1, \dots, x_n)V.$$

左边按最后一行展开, t 的系数等于

$$(-1)^{n+3} D.$$

由于

$$(-1)^{n+3} = (-1)^{n-1},$$

所以

$$D = e_{n-1}(x_1, \dots, x_n)V.$$

即

$$D = \left(\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} x_j \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

□