

向量与矩阵的秩

秦加俊

2026 年 6 月 20 日

1 向量组与矩阵的秩

例题 1.1: Steinitz 替换定理 设向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$$

线性无关，且可由向量组

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$$

线性表示。于是有 $r \leq s$ 。证明：可用

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$$

替换

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$$

中的 r 个向量。不妨设替换了 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ ，使得向量组

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \dots, \beta_s$$

和向量组

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$$

等价。

解答. 我们对 r 作归纳。

当 $r = 1$ 时，由题设

$$\alpha_1 = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_s\beta_s.$$

因为 $\alpha_1 \neq 0$ ，故至少有一个 $c_j \neq 0$ 。重新排列 $\beta_1, \dots, \beta_s$ ，不妨设 $c_1 \neq 0$ 。于是

$$\beta_1 = \frac{1}{c_1}\alpha_1 - \frac{c_2}{c_1}\beta_2 - \dots - \frac{c_s}{c_1}\beta_s.$$

所以

$$\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_s$$

与

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$$

等价。

假设结论对 $r-1$ 成立。由于

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$$

线性无关, 且均可由 $\beta_1, \dots, \beta_s$ 线性表示, 由归纳假设, 可以适当重新排列 β , 使得

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_r, \dots, \beta_s$$

与

$$\beta_1, \dots, \beta_s$$

等价。

因为 α_r 也可由 $\beta_1, \dots, \beta_s$ 线性表示, 所以它也可由

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_r, \dots, \beta_s$$

线性表示。于是

$$\alpha_r = c_1\alpha_1 + \dots + c_{r-1}\alpha_{r-1} + d_r\beta_r + \dots + d_s\beta_s.$$

其中 $d_r, \dots, d_s$ 不可能全为 0。否则 α_r 可由

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$$

线性表示, 这与

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r$$

线性无关矛盾。

重新排列 $\beta_r, \dots, \beta_s$, 不妨设 $d_r \neq 0$ 。于是可由上式解出

$$\beta_r = \frac{1}{d_r}\alpha_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{c_i}{d_r}\alpha_i - \sum_{j=r+1}^s \frac{d_j}{d_r}\beta_j.$$

因此

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \dots, \beta_s$$

与

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_r, \dots, \beta_s$$

等价, 从而也与

$$\beta_1, \dots, \beta_s$$

等价。

归纳完成, Steinitz 替换定理得证。 □

例题 1.2: 一个基本的秩不等式 设 A 和 B 为 n 阶方阵, 证明:

$$\text{rank}(AB - E_n) \leq \text{rank}(A - E_n) + \text{rank}(B - E_n).$$

解答. 注意恒等式

$$AB - E_n = A(B - E_n) + (A - E_n).$$

因此由秩的基本不等式

$$\text{rank}(X + Y) \leq \text{rank } X + \text{rank } Y$$

以及

$$\text{rank}(A(B - E_n)) \leq \text{rank}(B - E_n),$$

得到

$$\begin{aligned} \text{rank}(AB - E_n) &\leq \text{rank}(A(B - E_n)) + \text{rank}(A - E_n) \\ &\leq \text{rank}(B - E_n) + \text{rank}(A - E_n). \end{aligned}$$

即

$$\text{rank}(AB - E_n) \leq \text{rank}(A - E_n) + \text{rank}(B - E_n).$$

□

例题 1.3: 幂等矩阵乘积的秩估计 设 k 是正整数, $B_1, B_2, \dots, B_k$ 都是 n 阶幂等矩阵。记

$$A = B_1 B_2 \cdots B_k.$$

证明:

$$\text{rank}(E_n - A) \leq k(n - \text{rank}(A)).$$

解答. 由上一题反复使用可得

$$\text{rank}(E_n - B_1 B_2 \cdots B_k) \leq \sum_{i=1}^k \text{rank}(E_n - B_i).$$

因为 B_i 是幂等矩阵, 所以

$$B_i^2 = B_i.$$

幂等矩阵的特征值只能是 0 或 1, 因此

$$\text{rank}(E_n - B_i) = n - \text{rank}(B_i).$$

又因为

$$A = B_1 B_2 \cdots B_k,$$

所以

$$\text{rank}(A) \leq \text{rank}(B_i), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

于是

$$n - \text{rank}(B_i) \leq n - \text{rank}(A).$$

综上,

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(E_n - A) &\leq \sum_{i=1}^k \operatorname{rank}(E_n - B_i) \\ &= \sum_{i=1}^k (n - \operatorname{rank}(B_i)) \\ &\leq k(n - \operatorname{rank}(A)).\end{aligned}$$

证明完毕。 □

例题 1.4: 两个秩恒等式 设 A 为 n 阶方阵, 证明:

(1)

$$\operatorname{rank}(A^2 - E_n) = \operatorname{rank}(A + E_n) + \operatorname{rank}(A - E_n) - n,$$

进而

$$A^2 = E_n \iff \operatorname{rank}(A + E_n) + \operatorname{rank}(A - E_n) = n;$$

(2)

$$\operatorname{rank}(A^2 - A) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(A - E_n) - n,$$

进而

$$A^2 = A \iff \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(A - E_n) = n.$$

解答. (1) 先证明零空间分解

$$\ker(A^2 - E_n) = \ker(A - E_n) \oplus \ker(A + E_n).$$

一方面, 如果 $x \in \ker(A - E_n)$ 或 $x \in \ker(A + E_n)$, 显然

$$(A^2 - E_n)x = 0.$$

另一方面, 若

$$(A^2 - E_n)x = 0,$$

即 $A^2x = x$, 令

$$x_+ = \frac{1}{2}(x + Ax), \quad x_- = \frac{1}{2}(x - Ax).$$

则

$$x = x_+ + x_-,$$

且

$$Ax_+ = x_+, \quad Ax_- = -x_-.$$

所以

$$x_+ \in \ker(A - E_n), \quad x_- \in \ker(A + E_n).$$

同时

$$\ker(A - E_n) \cap \ker(A + E_n) = \{0\}.$$

因此零空间直和分解成立。

于是

$$n - \text{rank}(A^2 - E_n) = n - \text{rank}(A - E_n) + n - \text{rank}(A + E_n).$$

整理得

$$\text{rank}(A^2 - E_n) = \text{rank}(A + E_n) + \text{rank}(A - E_n) - n.$$

因此

$$A^2 = E_n$$

当且仅当

$$\text{rank}(A^2 - E_n) = 0,$$

也当且仅当

$$\text{rank}(A + E_n) + \text{rank}(A - E_n) = n.$$

(2) 同理证明

$$\ker(A^2 - A) = \ker A \oplus \ker(A - E_n).$$

若

$$(A^2 - A)x = 0,$$

即 $A^2x = Ax$, 令

$$x_0 = x - Ax, \quad x_1 = Ax.$$

则

$$x = x_0 + x_1,$$

且

$$Ax_0 = 0, \quad Ax_1 = x_1.$$

所以

$$x_0 \in \ker A, \quad x_1 \in \ker(A - E_n).$$

又

$$\ker A \cap \ker(A - E_n) = \{0\}.$$

因此

$$\ker(A^2 - A) = \ker A \oplus \ker(A - E_n).$$

于是

$$n - \text{rank}(A^2 - A) = n - \text{rank}(A) + n - \text{rank}(A - E_n).$$

整理得

$$\text{rank}(A^2 - A) = \text{rank}(A) + \text{rank}(A - E_n) - n.$$

因此

$$A^2 = A$$

当且仅当

$$\operatorname{rank}(A^2 - A) = 0,$$

也当且仅当

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(A - E_n) = n.$$

□

例题 1.5: 幂等矩阵和为单位矩阵的判别 设 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 都是 n 阶方阵, 其中 $k \geq 2$, 且满足

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_k = E_n.$$

证明: $A_1, A_2, \dots, A_k$ 都是幂等矩阵的充分且必要条件是

$$\operatorname{rank}(A_1) + \operatorname{rank}(A_2) + \cdots + \operatorname{rank}(A_k) = n.$$

解答. 先证必要性。若每个 A_i 都是幂等矩阵, 则 A_i 的特征值只能是 0 或 1, 因此

$$\operatorname{tr}(A_i) = \operatorname{rank}(A_i).$$

由

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_k = E_n$$

取迹, 得到

$$\operatorname{tr}(A_1) + \operatorname{tr}(A_2) + \cdots + \operatorname{tr}(A_k) = n.$$

故

$$\operatorname{rank}(A_1) + \operatorname{rank}(A_2) + \cdots + \operatorname{rank}(A_k) = n.$$

再证充分性。设

$$\operatorname{rank}(A_1) + \operatorname{rank}(A_2) + \cdots + \operatorname{rank}(A_k) = n.$$

由于

$$E_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_k,$$

所以

$$\mathbb{F}^n = \operatorname{Im} A_1 + \operatorname{Im} A_2 + \cdots + \operatorname{Im} A_k.$$

而

$$\dim \mathbb{F}^n = n = \sum_{i=1}^k \operatorname{rank}(A_i) = \sum_{i=1}^k \dim \operatorname{Im} A_i.$$

因此

$$\mathbb{F}^n = \operatorname{Im} A_1 \oplus \operatorname{Im} A_2 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} A_k.$$

任取 $x \in \mathbb{F}^n$, 有

$$x = E_n x = A_1 x + A_2 x + \cdots + A_k x, \quad A_i x \in \operatorname{Im} A_i.$$

由于上述分解是直和, 对 $A_ix \in \text{Im } A_i$ 再分解, 有

$$A_ix = A_1(A_ix) + A_2(A_ix) + \cdots + A_k(A_ix).$$

左边作为直和分解只在第 i 个分量上非零, 因此

$$A_i(A_ix) = A_ix, \quad A_j(A_ix) = 0 \quad (j \neq i).$$

所以对任意 x ,

$$A_i^2 x = A_ix.$$

因此

$$A_i^2 = A_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

充分性得证。 □

例题 1.6: 实对称矩阵非零主子式的符号 设 A 是 n 阶实对称矩阵。证明: 如果

$$\text{rank}(A) = r,$$

则 A 至少有一个 r 阶主子式非零, 同时所有的 r 阶非零主子式都同号。

解答. 由实对称矩阵的谱分解, 存在 $n \times r$ 实矩阵 U 和 r 阶非奇异实对角矩阵

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r), \quad \lambda_i \neq 0,$$

使得

$$A = U\Lambda U^T, \quad \text{rank } U = r.$$

例如可以把 U 取为由 A 的非零特征值对应的单位特征向量组成的矩阵。

任取指标集

$$I = \{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\},$$

记 $A[I]$ 为对应的 r 阶主子矩阵, $U[I]$ 为 U 中取出这些行得到的 r 阶矩阵。则

$$A[I] = U[I]\Lambda U[I]^T.$$

因此

$$\det A[I] = \det \Lambda \cdot (\det U[I])^2.$$

因为 $\text{rank } U = r$, 所以 U 至少有一个 r 阶子式非零, 即存在某个 I 使得

$$\det U[I] \neq 0.$$

于是

$$\det A[I] \neq 0.$$

这说明 A 至少有一个 r 阶主子式非零。

同时, 由

$$\det A[I] = \det \Lambda \cdot (\det U[I])^2$$

可知, 所有非零的 r 阶主子式符号都等于

$$\operatorname{sgn}(\det \Lambda).$$

因此所有 r 阶非零主子式都同号。 □

例题 1.7: 实反对称矩阵的秩与主子式 设 A 是 n 阶实反对称矩阵。证明:

$$\operatorname{rank}(A)$$

一定是偶数; 并且如果

$$\operatorname{rank}(A) = r,$$

则 A 至少有一个 r 阶主子式非零, 同时所有的 r 阶非零主子式都同号。

解答. 实反对称矩阵可以化为标准形: 存在实矩阵 U 和非奇异实反对称矩阵

$$J = \operatorname{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \lambda_m \\ -\lambda_m & 0 \end{pmatrix} \right), \quad \lambda_i \neq 0,$$

使得

$$A = UJU^T, \quad \operatorname{rank} U = 2m.$$

因此

$$\operatorname{rank}(A) = 2m,$$

所以实反对称矩阵的秩一定是偶数。

令

$$r = 2m.$$

任取指标集

$$I = \{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\},$$

有

$$A[I] = U[I]JU[I]^T.$$

于是

$$\det A[I] = \det J \cdot (\det U[I])^2.$$

由于

$$\det J = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \cdots \lambda_m^2 > 0,$$

所以所有非零的 r 阶主子式都为正, 因而同号。

又因为

$$\operatorname{rank} U = r,$$

故存在某个指标集 I , 使得

$$\det U[I] \neq 0.$$

于是

$$\det A[I] \neq 0.$$

所以 A 至少有一个 r 阶主子式非零。 □

例题 1.8: 零乘积条件下的秩公式 设 A 和 B 是 n 阶方阵, 满足

$$AB = BA = O.$$

证明:

(1) 如果

$$\operatorname{rank}(A^2) = \operatorname{rank}(A),$$

那么

$$\operatorname{rank}(A + B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B);$$

(2) 存在正整数 k , 使得

$$\operatorname{rank}(A^k + B^k) = \operatorname{rank}(A^k) + \operatorname{rank}(B^k).$$

解答. (1) 由

$$AB = O$$

可知

$$\operatorname{Im} B \subseteq \ker A.$$

又由

$$BA = O$$

可知

$$B|_{\operatorname{Im} A} = 0.$$

条件

$$\operatorname{rank}(A^2) = \operatorname{rank}(A)$$

说明

$$A : \operatorname{Im} A \longrightarrow \operatorname{Im} A$$

是满射, 从而是双射。因此

$$\operatorname{Im} A \cap \ker A = \{0\}.$$

由于

$$\operatorname{Im} B \subseteq \ker A,$$

得

$$\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im} B = \{0\}.$$

下面证明

$$\operatorname{Im}(A + B) = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im} B.$$

显然

$$\operatorname{Im}(A + B) \subseteq \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B.$$

反过来, 先取 $y \in \operatorname{Im} A$ 。由于

$$A : \operatorname{Im} A \rightarrow \operatorname{Im} A$$

是满射, 存在 $z \in \operatorname{Im} A$, 使得

$$Az = y.$$

又因为 $Bz = 0$, 所以

$$(A + B)z = y.$$

因此

$$\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im}(A + B).$$

再取 $w = Bv \in \operatorname{Im} B$ 。因为 $Av \in \operatorname{Im} A$, 存在 $z \in \operatorname{Im} A$, 使得

$$Az = Av.$$

且 $Bz = 0$ 。于是

$$(A + B)(v - z) = Av + Bv - Az - Bz = Bv = w.$$

所以

$$\operatorname{Im} B \subseteq \operatorname{Im}(A + B).$$

因此

$$\operatorname{Im}(A + B) = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im} B.$$

取维数, 得

$$\operatorname{rank}(A + B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

(2) 对任意方阵 A , 数列

$$\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(A^2), \operatorname{rank}(A^3), \dots$$

单调不增且非负, 所以必然稳定。故存在正整数 k , 使得

$$\operatorname{rank}(A^{2k}) = \operatorname{rank}(A^k).$$

令

$$X = A^k, \quad Y = B^k.$$

由

$$AB = BA = O$$

得

$$XY = YX = O.$$

并且

$$\text{rank}(X^2) = \text{rank}(A^{2k}) = \text{rank}(A^k) = \text{rank}(X).$$

由第 (1) 问应用于 X, Y , 得到

$$\text{rank}(X + Y) = \text{rank}(X) + \text{rank}(Y).$$

即

$$\text{rank}(A^k + B^k) = \text{rank}(A^k) + \text{rank}(B^k).$$

□

2 秩与线性方程组

例题 2.1: 齐次线性方程组同解的判别 设

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n}, \quad B \in \mathbb{F}^{n \times k}.$$

证明: 齐次线性方程组

$$ABX = 0 \quad \text{和} \quad BX = 0$$

同解的充分必要条件是

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(B).$$

解答. 注意到

$$BX = 0 \implies ABX = 0,$$

所以

$$\ker B \subseteq \ker(AB).$$

因此两个齐次方程组同解, 当且仅当

$$\ker B = \ker(AB).$$

由秩-零化度定理,

$$\dim \ker B = k - \text{rank}(B), \quad \dim \ker(AB) = k - \text{rank}(AB).$$

因为 $\ker B \subseteq \ker(AB)$, 故

$$\ker B = \ker(AB)$$

当且仅当二者维数相等, 也就是

$$k - \text{rank}(B) = k - \text{rank}(AB).$$

等价于

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(B).$$

证明完毕。 □

例题 2.2: 行、列极大无关组决定的非零子式 设矩阵

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

的行分块和列分块分别为

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

且

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$$

和

$$\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$$

分别是 A 的行向量组和列向量组的极大无关组，其中

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n.$$

证明： A 的 r 阶子式

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \neq 0.$$

解答. 记由这些行和列交叉得到的 r 阶子矩阵为

$$M = A[\{i_1, \dots, i_r\}, \{j_1, \dots, j_r\}].$$

我们证明 $\det M \neq 0$ 。

反设

$$\det M = 0.$$

则 M 的列向量线性相关，故存在不全为零的数

$$c_1, c_2, \dots, c_r$$

使得

$$M \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix} = 0.$$

这就是说，列向量线性组合

$$\gamma = c_1\beta_{j_1} + c_2\beta_{j_2} + \cdots + c_r\beta_{j_r}$$

在第 $i_1, i_2, \dots, i_r$ 个分量上全为 0。

由于

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$$

是行向量组的极大无关组，所以任意一行 α_i 都可由它们线性表示。于是 γ 的任意一个分量都是第 $i_1, \dots, i_r$ 个分量的线性组合，故全为 0。因此

$$\gamma = 0.$$

这与

$$\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$$

线性无关矛盾。

所以

$$\det M \neq 0,$$

即

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \neq 0.$$

□

例题 2.3: 符号交错矩阵的秩 设

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij})$$

是 n 阶方阵，且

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}.$$

证明：

$$\text{rank}(B) = \text{rank}(A).$$

解答. 令

$$D = \text{diag}((-1)^1, (-1)^2, \dots, (-1)^n).$$

则 D 可逆，并且

$$B = DAD.$$

事实上，

$$(DAD)_{ij} = (-1)^i a_{ij} (-1)^j = (-1)^{i+j} a_{ij} = b_{ij}.$$

由于左右乘可逆矩阵不改变矩阵的秩，所以

$$\text{rank}(B) = \text{rank}(DAD) = \text{rank}(A).$$

□

例题 2.4: 秩条件在右乘任意矩阵下的保持 设

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n}, \quad B \in \mathbb{F}^{n \times k},$$

且

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(B).$$

证明: 对任意

$$C \in \mathbb{F}^{k \times l},$$

有

$$\text{rank}(ABC) = \text{rank}(BC).$$

解答. 由

$$BX = 0 \implies ABX = 0$$

可知

$$\ker B \subseteq \ker(AB).$$

又由

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(B)$$

以及秩-零化度定理可知

$$\dim \ker(AB) = \dim \ker B.$$

因此

$$\ker(AB) = \ker B.$$

于是对任意列向量 $X \in \mathbb{F}^l$, 有

$$ABCX = 0 \iff AB(CX) = 0 \iff B(CX) = 0 \iff BCX = 0.$$

所以

$$\ker(ABC) = \ker(BC).$$

再由秩-零化度定理, 得到

$$\text{rank}(ABC) = \text{rank}(BC).$$

□

例题 2.5: 线性方程组有解的正交判别 证明: 线性方程组

$$AX = \beta$$

有解的充分必要条件是, 齐次线性方程组

$$A^T Y = 0$$

的任一解 α 均满足

$$\alpha^T \beta = 0.$$

解答. 必要性显然。若

$$AX = \beta$$

有解, 设 $\beta = AX_0$ 。任取满足

$$A^T \alpha = 0$$

的向量 α , 则

$$\alpha^T \beta = \alpha^T AX_0 = (A^T \alpha)^T X_0 = 0.$$

下面证明充分性。设对任意

$$\alpha \in \ker A^T$$

都有

$$\alpha^T \beta = 0.$$

这说明 β 与 $\ker A^T$ 中所有向量正交, 即

$$\beta \in (\ker A^T)^\perp.$$

由线性代数基本定理,

$$(\ker A^T)^\perp = \operatorname{Im} A.$$

因此

$$\beta \in \operatorname{Im} A,$$

也就是说, 存在 X_0 , 使得

$$AX_0 = \beta.$$

所以线性方程组 $AX = \beta$ 有解。 □

例题 2.6: 矩阵方程的秩最小解 设矩阵方程

$$AX = B$$

有解, 其中

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n}, \quad B \in \mathbb{F}^{m \times l}.$$

证明:

(1) 存在 $AX = B$ 的解 X_0 , 使得

$$\operatorname{rank}(X_0) = \operatorname{rank}(B).$$

称 X_0 为 $AX = B$ 的秩最小解;

(2) 若 X_0 为 $AX = B$ 的秩最小解, 则存在

$$M \in \mathbb{F}^{n \times m},$$

使得

$$X_0 = MB.$$

解答. (1) 设

$$\text{rank}(B) = r.$$

取 B 的一组列向量极大无关组

$$b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_r}.$$

因为方程 $AX = B$ 有解, 所以每个 b_{j_t} 都属于 $\text{Im } A$. 故可取

$$u_t \in \mathbb{F}^n, \quad Au_t = b_{j_t}, \quad t = 1, 2, \dots, r.$$

对 B 的任一系列 b_j , 存在系数 c_{tj} , 使得

$$b_j = \sum_{t=1}^r c_{tj} b_{j_t}.$$

令

$$x_j = \sum_{t=1}^r c_{tj} u_t.$$

则

$$Ax_j = b_j.$$

以 x_j 为第 j 列组成矩阵 X_0 , 则

$$AX_0 = B.$$

且 X_0 的所有列都属于

$$\text{span}\{u_1, \dots, u_r\},$$

所以

$$\text{rank}(X_0) \leq r.$$

另一方面, 由

$$B = AX_0$$

得

$$\text{rank}(B) \leq \text{rank}(X_0).$$

因此

$$\text{rank}(X_0) = r = \text{rank}(B).$$

(2) 因为

$$AX_0 = B$$

且

$$\text{rank}(X_0) = \text{rank}(B),$$

所以

$$\text{rank}(AX_0) = \text{rank}(X_0).$$

这说明线性映射 A 在子空间 $\text{Im } X_0$ 上是单射。于是若

$$Bc = 0,$$

则

$$AX_0c = 0.$$

又 $X_0c \in \text{Im } X_0$, 由单射性得

$$X_0c = 0.$$

因此

$$\ker B \subseteq \ker X_0.$$

定义线性映射

$$T : \text{Im } B \longrightarrow \mathbb{F}^n$$

为

$$T(Bc) = X_0c.$$

这是良定义的。因为若

$$Bc = Bd,$$

则

$$B(c - d) = 0,$$

从而

$$X_0(c - d) = 0,$$

即

$$X_0c = X_0d.$$

将 T 扩张为 $\mathbb{F}^m$ 到 $\mathbb{F}^n$ 的线性映射, 其矩阵记为

$$M \in \mathbb{F}^{n \times m}.$$

则对任意 c ,

$$MBc = T(Bc) = X_0c.$$

所以

$$MB = X_0.$$

即

$$X_0 = MB.$$

□

例题 2.7: 矩阵方程 $AXB = C$ 的有解判别 设

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n}, \quad B \in \mathbb{F}^{p \times q}, \quad C \in \mathbb{F}^{m \times q}.$$

证明: 矩阵方程

$$AXB = C$$

有解的充分必要条件是, 矩阵方程

$$AY = C \quad \text{和} \quad ZB = C$$

都分别有解。

解答. 必要性显然。若

$$AXB = C,$$

则令

$$Y = XB, \quad Z = AX,$$

便有

$$AY = C, \quad ZB = C.$$

下面证明充分性。设

$$AY = C \quad \text{和} \quad ZB = C$$

都有解。

对 A 作等价标准形分解。存在可逆矩阵 P, Q , 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = A_0, \quad r = \text{rank}(A).$$

对 B 作等价标准形分解。存在可逆矩阵 U, V , 使得

$$UBV = \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix} = B_0, \quad s = \text{rank}(B).$$

令

$$C_0 = PCV.$$

矩阵方程 $AXB = C$ 等价于

$$A_0 X_0 B_0 = C_0,$$

其中

$$X_0 = Q^{-1} X U^{-1}.$$

由 $AY = C$ 有解可知

$$A_0 Y_0 = C_0$$

有解。因此 C_0 的第 $r+1$ 行到第 m 行全为 0。

由 $ZB = C$ 有解可知

$$Z_0 B_0 = C_0$$

有解。因此 C_0 的第 $s+1$ 列到第 q 列全为 0。

所以 C_0 只有左上角 $r \times s$ 块可能非零。设

$$C_0 = \begin{pmatrix} C_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

取

$$X_0 = \begin{pmatrix} C_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中矩阵大小按 $A_0 X_0 B_0$ 的乘法相容来补零, 则

$$A_0 X_0 B_0 = C_0.$$

令

$$X = Q X_0 U,$$

便得到

$$AXB = C.$$

因此 $AXB = C$ 有解。

综上, $AXB = C$ 有解当且仅当 $AY = C$ 和 $ZB = C$ 都有解。

□