

线性空间

秦加俊

2026 年 4 月 9 日

1 矩阵的中心化子

例题 1.1: 友阵的中心化子是其多项式 设 $C \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 是首一多项式

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

的友矩阵。证明：矩阵 X 与 C 可交换，即

$$XC = CX,$$

当且仅当 X 可以表示为 C 的多项式，即存在多项式 $g(\lambda)$ ，使得

$$X = g(C).$$

解答. 友矩阵的关键性质是它具有循环向量。具体地，存在向量 v ，使得

$$v, Cv, C^2v, \dots, C^{n-1}v$$

构成 $\mathbb{F}^n$ 的一组基。因此，任意与 C 可交换的矩阵 X 都由 Xv 完全决定。

先证明必要性。由于上面这组向量是基，存在唯一次数小于 n 的多项式 $g(\lambda)$ ，使得

$$Xv = g(C)v.$$

又因为 $XC = CX$ ，对任意 $0 \leq j \leq n-1$ ，有

$$X(C^jv) = C^jXv = C^jg(C)v = g(C)C^jv.$$

于是 X 与 $g(C)$ 在一组基

$$v, Cv, \dots, C^{n-1}v$$

上的作用完全相同，故

$$X = g(C).$$

反过来，若 $X = g(C)$ ，则显然

$$XC = g(C)C = Cg(C) = CX.$$

因此 X 与 C 可交换当且仅当 X 是 C 的多项式。 □

例题 1.2: Sylvester 方程与特征值的关系 设矩阵

$$A \in \mathbb{C}^{m \times m}, \quad B \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

证明：矩阵方程

$$AX - XB = O$$

只有零解 $X = O$ 的充要条件是矩阵 A 与 B 没有公共特征值。

解答. 将方程

$$AX - XB = O$$

看作关于 X 的线性方程。因为 A, B 都是复矩阵，可以分别相似于上三角矩阵。相似变换不改变该方程解空间的维数，所以不妨设

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij})$$

均为上三角矩阵，其对角元分别为 A 与 B 的特征值。

考虑线性算子

$$T : \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times n}, \quad T(X) = AX - XB.$$

在矩阵单位 E_{ij} 的自然顺序下， T 的矩阵是上三角的，且对角元为

$$\lambda_i(A) - \lambda_j(B), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

因此 T 可逆当且仅当

$$\lambda_i(A) - \lambda_j(B) \neq 0$$

对所有 i, j 成立，也就是 A 与 B 没有公共特征值。

于是方程 $AX - XB = O$ 只有零解，当且仅当 T 可逆，当且仅当 A 与 B 没有公共特征值。 $\square$

例题 1.3: 分块对角阵的中心化子结构 设分块对角阵

$$A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k),$$

其中 A_i 为 n_i 阶方阵。假设对任意 $i \neq j$ ，矩阵 A_i 与 A_j 均没有公共特征值。证明：若矩阵 X 与 A 可交换，即

$$XA = AX,$$

则 X 必定也是与 A 具有相同划分的分块对角阵：

$$X = \text{diag}(X_1, X_2, \dots, X_k),$$

且每个分块均满足

$$X_i A_i = A_i X_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

解答. 将 X 按照 A 的分块方式写成分块矩阵

$$X = (X_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}, \quad X_{ij} \in \mathbb{F}^{n_i \times n_j}.$$

由

$$XA = AX$$

比较第 (i, j) 个分块, 得到

$$X_{ij}A_j = A_iX_{ij},$$

等价于

$$A_iX_{ij} - X_{ij}A_j = O.$$

当 $i \neq j$ 时, 题设说明 A_i 与 A_j 没有公共特征值。由上一题的 Sylvester 方程结论可知

$$X_{ij} = O, \quad i \neq j.$$

因此 X 必为分块对角阵:

$$X = \text{diag}(X_1, X_2, \dots, X_k).$$

再看对角分块 $i = j$, 由同一个分块方程得到

$$X_iA_i = A_iX_i.$$

故结论成立。 □

2 线性空间

注记 2.1: 一个共同思路

细心的同学可以发现, 下面前四题的证明都围绕同一个核心事实展开: 数域上有限维线性空间不能被有限个真子空间覆盖。

例题 2.1: 有限个真子空间不能覆盖线性空间 证明: 数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $V (V \neq \{0\})$ 不能被它的有限个真子空间所覆盖, 即设 $W_1, W_2, \dots, W_k$ 是 V 的真子空间, 则存在 $\alpha \in V$, 使得

$$\alpha \notin W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k.$$

解答. 由于 $\mathbb{F}$ 是数域 (包含有理数域, 因此 $\mathbb{F}$ 有无限多个元素), 我们对真子空间的个数 k 进行数学归纳法。

- 当 $k = 1$ 时, W_1 是真子空间, 显然有 $V \neq W_1$, 存在 $\alpha \notin W_1$, 结论成立。
- 假设对于 $k - 1$ 个真子空间结论成立。现在考虑 k 个真子空间 $W_1, \dots, W_k$ 。

如果 $V = W_1 \cup \dots \cup W_k$, 为了使覆盖极小化, 我们可以假设前 $k - 1$ 个真子空间不能覆盖 V (否则直接由归纳假设得证)。因此, 存在向量 $\beta \in V$, 使得 $\beta \notin W_1 \cup \dots \cup W_{k-1}$ 。既然 V 被这 k 个子空间覆盖, 必然有 $\beta \in W_k$ 。又因为 W_k 是真子空间, 存在向量 $\alpha \notin W_k$ 。

现在构造一个由无限多个向量构成的集合 (直线):

$$L = \{\alpha + c\beta \mid c \in \mathbb{F}\}$$

因为 V 被 $W_1, \dots, W_k$ 覆盖, 所以 L 中的无穷多个向量也必然落在这 k 个真子空间中。由于 $\mathbb{F}$ 无限而子空间只有有限个, 根据抽屉原理, 必然存在 $c_1 \neq c_2$, 使得 $\alpha + c_1\beta$ 和 $\alpha + c_2\beta$ 落在同一个子空间 W_i 中。于是它们的差也属于 W_i :

$$(\alpha + c_1\beta) - (\alpha + c_2\beta) = (c_1 - c_2)\beta \in W_i$$

因为 $c_1 \neq c_2$, 所以 $\beta \in W_i$ 。

- 如果 $1 \leq i \leq k-1$, 则 $\beta \in W_i$, 这与我们选取 $\beta \notin W_1 \cup \cdots \cup W_{k-1}$ 矛盾。
- 如果 $i = k$, 即 $\beta \in W_k$, 又因为 $\alpha + c_1\beta \in W_k$, 所以 $\alpha = (\alpha + c_1\beta) - c_1\beta \in W_k$, 这与我们选取 $\alpha \notin W_k$ 矛盾。

综上所述, V 不能被有限个真子空间覆盖。 $\square$

例题 2.2: 避开有限个真子空间的一组基 设 $W_1, W_2, \dots, W_k$ 都是线性空间 V 的真子空间, $V \neq \{0\}, k \in \mathbb{N}$, 证明: 存在 V 的基 B , 使得 $B \cap (W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_k) = \emptyset$ 。

解答. 设 $\dim V = n$ 。我们需要在 V 中找到 n 个线性无关的向量 $e_1, \dots, e_n$, 且它们都不属于 $\bigcup_{i=1}^k W_i$ 。我们将通过逐步构造来证明。

- **第一步:** 由上一题可知, V 不能被 $W_1 \cup \cdots \cup W_k$ 覆盖, 因此存在 $e_1 \in V$, 使得 $e_1 \notin \bigcup_{i=1}^k W_i$ 。
- **第 m 步到第 $m+1$ 步:** 假设我们已经找到了 m 个线性无关的向量 $e_1, \dots, e_m$ ($m < n$), 并且它们都不属于 $\bigcup_{i=1}^k W_i$ 。

令 $U_m = \text{span}(e_1, \dots, e_m)$ 。因为 $m < n$, U_m 是 V 的一个真子空间。考虑集合 $\left(\bigcup_{i=1}^k W_i\right) \cup U_m$ 。这是 $k+1$ 个真子空间的并集。由上一题的结论可知, 这 $k+1$ 个真子空间依然不能覆盖 V 。

因此, 我们可以选取向量 $e_{m+1} \in V$, 使得:

$$e_{m+1} \notin \left(\bigcup_{i=1}^k W_i\right) \cup U_m$$

因为 $e_{m+1} \notin U_m$, 所以 $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}$ 是线性无关的。同时 $e_{m+1} \notin \bigcup_{i=1}^k W_i$ 。

重复上述步骤, 直到 $m = n$ 。我们就得到了一组基 $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, 且 $B \cap \left(\bigcup_{i=1}^k W_i\right) = \emptyset$ 。 $\square$

例题 2.3: 与有限个小维子空间相交为零的子空间 设 $W_1, W_2, \dots, W_k$ 是 n 维线性空间 V 的子空间, 且 $m < n$ 。证明: 如果对任意 i ($1 \leq i \leq k$), 成立 $\dim W_i \leq m$, 则存在 V 的子空间 U , 使得 $\dim U = n - m$, 且对任意 $1 \leq i \leq k$, 都有 $U \cap W_i = \{0\}$ 。

解答. 寻找子空间 U 等价于寻找 $n - m$ 个线性无关的向量 $u_1, \dots, u_{n-m}$ 构成 U 的基, 使得对于任意 i , 都有 $\text{span}(u_1, \dots, u_{n-m}) \cap W_i = \{0\}$ 。我们同样通过归纳法构造。

- **选取 u_1 :** 因为 $\dim W_i \leq m < n$, 每个 W_i 都是真子空间, 由第一题可知存在 $u_1 \notin \bigcup_{i=1}^k W_i$ 。此时 $\text{span}(u_1) \cap W_i = \{0\}$ 。
- **归纳假设:** 假设已经选出线性无关的 $u_1, \dots, u_j$ ($j < n - m$), 令 $U_j = \text{span}(u_1, \dots, u_j)$, 且对任意 i 有 $U_j \cap W_i = \{0\}$ 。

我们希望找到 u_{j+1} 使得 $(U_j \oplus \text{span}(u_{j+1})) \cap W_i = \{0\}$ 。这等价于要求 $u_{j+1} \notin W_i + U_j$ 。计算维数:

$$\dim(W_i + U_j) = \dim W_i + \dim U_j - \dim(W_i \cap U_j) \leq m + j - 0 = m + j$$

因为 $j < n - m$, 所以 $m + j < n$ 。这意味着对所有 i , $W_i + U_j$ 都是 V 的真子空间。

根据第一题, 有限个真子空间的并 $\bigcup_{i=1}^k (W_i + U_j)$ 不能覆盖 V 。因此, 存在 u_{j+1} 不属于任何一个 $W_i + U_j$ 。

按照此法一直构造到 $j = n - m$ 步, 令 $U = \text{span}(u_1, \dots, u_{n-m})$, 即满足 $\dim U = n - m$ 且对所有 $1 \leq i \leq k$ 都有 $U \cap W_i = \{0\}$ 。 $\square$

例题 2.4: 公共直和补 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间, $W_1, W_2, \dots, W_k$ 是 V 的维数相同的子空间, 证明: $W_1, W_2, \dots, W_k$ 有公共的直和补, 即存在 V 的子空间 U , 使得对 $i = 1, 2, \dots, k$ 都有 $V = W_i \oplus U$.

解答. 上一题的直接推论。 □

例题 2.5: 三个子空间维数公式是否成立 类比于三个有限集的并的所含元素个数公式, 猜想对于有限维线性空间 V 的三个子空间 W_1, W_2, W_3 , 成立

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2 + W_3) &= \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 - \dim(W_1 \cap W_2) - \dim(W_1 \cap W_3) \\ &\quad - \dim(W_2 \cap W_3) + \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3). \end{aligned}$$

上面公式是否成立? 成立时给出证明, 不成立时举出反例。

解答. 该公式 **不成立**。

反例: 在二维实线性空间 $V = \mathbb{R}^2$ 中, 考虑三条经过原点且互不相同的直线 (一维子空间):

$$W_1 = \text{span}\{(1, 0)\}, \quad W_2 = \text{span}\{(0, 1)\}, \quad W_3 = \text{span}\{(1, 1)\}$$

计算等式左边: $W_1 + W_2 + W_3 = \mathbb{R}^2$, 所以 $\dim(W_1 + W_2 + W_3) = 2$ 。

计算等式右边: 每个子空间都是一维的, 故 $\dim W_1 = \dim W_2 = \dim W_3 = 1$ 。任意两个不同的子空间交集只有零向量, 故 $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1 \cap W_3) = \dim(W_2 \cap W_3) = 0$ 。三个子空间的交集同样只有零向量, 故 $\dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3) = 0$ 。

代入公式右边: $1 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 + 0 = 3$ 。

显然 $2 \neq 3$, 故公式不成立。 □

例题 2.6: 域扩张维数乘法公式 设 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{K}$ 都是数域, 且 $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$, 将 $\mathbb{K}$ 作为 $\mathbb{F}$ 上线性空间的维数记为 $[\mathbb{K} : \mathbb{F}]$ 。设 $\mathbb{E}$ 也是数域, 且 $\mathbb{K} \subset \mathbb{E}$ 。证明: 如果 $[\mathbb{E} : \mathbb{K}] < \infty$ 且 $[\mathbb{K} : \mathbb{F}] < \infty$, 那么 $[\mathbb{E} : \mathbb{F}] = [\mathbb{E} : \mathbb{K}][\mathbb{K} : \mathbb{F}]$ 。

解答. 设 $[\mathbb{E} : \mathbb{K}] = n$, $[\mathbb{K} : \mathbb{F}] = m$ 。设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 $\mathbb{E}$ 作为 $\mathbb{K}$ 上线性空间的一组基; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 是 $\mathbb{K}$ 作为 $\mathbb{F}$ 上线性空间的一组基。我们将证明集合 $S = \{\alpha_i \beta_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ 是 $\mathbb{E}$ 作为 $\mathbb{F}$ 上线性空间的一组基。

1. 证明生成性:

对于任意 $x \in \mathbb{E}$, 因为 α_i 是 $\mathbb{E}$ 在 $\mathbb{K}$ 上的基, 所以存在 $c_i \in \mathbb{K}$, 使得 $x = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$ 。又因为 $c_i \in \mathbb{K}$, 且 β_j 是 $\mathbb{K}$ 在 $\mathbb{F}$ 上的基, 所以对每个 c_i , 存在 $d_{ij} \in \mathbb{F}$, 使得 $c_i = \sum_{j=1}^m d_{ij} \beta_j$ 。将其代入 x 的表达式:

$$x = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m d_{ij} \beta_j \right) \alpha_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d_{ij} (\alpha_i \beta_j)$$

由于 $d_{ij} \in \mathbb{F}$, 这说明 S 可以在 $\mathbb{F}$ 上生成 $\mathbb{E}$ 。

2. 证明线性无关:

假设存在 $d_{ij} \in \mathbb{F}$, 使得 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d_{ij} (\alpha_i \beta_j) = 0$ 。我们可以将求和重新组合为:

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m d_{ij} \beta_j \right) \alpha_i = 0$$

注意到括号中的元素 $\sum_{j=1}^m d_{ij}\beta_j$ 属于 $\mathbb{K}$ 。因为 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 在 $\mathbb{K}$ 上是线性无关的, 所以对于所有的 i , 必须有:

$$\sum_{j=1}^m d_{ij}\beta_j = 0$$

又因为 $\beta_1, \dots, \beta_m$ 在 $\mathbb{F}$ 上是线性无关的, 且 $d_{ij} \in \mathbb{F}$, 所以对于所有的 i 和 j , 必须有 $d_{ij} = 0$ 。这就证明了集合 S 在 $\mathbb{F}$ 上线性无关。

因为 S 中有 mn 个元素, 所以 $[\mathbb{E} : \mathbb{F}] = mn = [\mathbb{E} : \mathbb{K}][\mathbb{K} : \mathbb{F}]$ 。 $\square$

例题 2.7: $\mathbb{R}$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上线性空间无限维 证明: 实数集 $\mathbb{R}$ 作为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间是无限维的。(提示: 实数集 $\mathbb{R}$ 的势是不可数无穷或者利用超越数。)

解答. 假设 $\mathbb{R}$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间是有限维的, 且 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = n$ 。那么 $\mathbb{R}$ 同构于 $\mathbb{Q}^n$ (即存在双射)。由于有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数集, 有限个可数集的笛卡尔积依然是可数集, 因此 $\mathbb{Q}^n$ 是可数的。然而, 由康托尔的对角线法则等结论熟知, 实数集 $\mathbb{R}$ 是不可数无穷的 (其势为连续统 $\aleph_1$), 不可数集不可能与可数集建立双射。矛盾。因此, $\mathbb{R}$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间必然是无限维的。

(注: 也可使用超越数法, 例如自然对数底 e 是超越数, 因此 $1, e, e^2, \dots, e^k$ 对任意整数 k 在 $\mathbb{Q}$ 上均线性无关, 从而维数为无穷。) $\square$

例题 2.8: 换位子张成迹零矩阵空间 设 W 是 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 中所有形如 $[A, B]$, $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 的矩阵所生成的子空间。证明:

$$(1) W = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} \mid \text{Tr}(A) = 0\};$$

$$(2) \dim W = n^2 - 1.$$

解答. (1) 证明 $W = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} \mid \text{Tr}(A) = 0\}$

设 $V_0 = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} \mid \text{Tr}(A) = 0\}$ 。对于任意生成元 $[A, B] = AB - BA$, 由迹的性质 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, 有 $\text{Tr}([A, B]) = 0$ 。由于 W 是由这些生成元张成的, 故 $W \subseteq V_0$ 。反过来, 我们需要证明 V_0 中的任一矩阵都能用换位子表示。考虑 V_0 的一组标准基:

- 所有非对角矩阵单位 E_{ij} ($i \neq j$)。可以验证 $E_{ij} = E_{ii}E_{ij} - E_{ij}E_{ii} = [E_{ii}, E_{ij}]$, 故 $E_{ij} \in W$ 。
- 对角线上元素和为 0 的基, 可以取为 $E_{ii} - E_{i+1, i+1}$ ($1 \leq i \leq n-1$)。可以验证 $E_{ii} - E_{i+1, i+1} = E_{i, i+1}E_{i+1, i} - E_{i+1, i}E_{i, i+1} = [E_{i, i+1}, E_{i+1, i}]$, 故 $E_{ii} - E_{i+1, i+1} \in W$ 。

这些矩阵构成了 V_0 的一组基, 既然它们都在 W 中, 必然有 $V_0 \subseteq W$ 。综上, $W = V_0$ 。

(2) 证明 $\dim W = n^2 - 1$

考虑迹映射 $\text{Tr} : \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}$ 。这是一个线性映射。因为 $\text{Tr}(E_{11}) = 1 \neq 0$, 所以 $\text{Im}(\text{Tr}) = \mathbb{F}$, 即该映射是满射, 其像空间的维数为 1。根据线性映射的维数公式 (秩-零化度定理):

$$\dim(\ker(\text{Tr})) + \dim(\text{Im}(\text{Tr})) = \dim(\mathbb{F}^{n \times n})$$

由于 $\ker(\text{Tr}) = V_0 = W$, 则有:

$$\dim W + 1 = n^2$$

故 $\dim W = n^2 - 1$ 。 $\square$

注记 2.2: 矩阵方法的几何应用

下一题是一个很有代表性的例子: 用矩阵理论中的子式展开解决线性空间中的基交换问题。

例题 2.9: 两组基的交换定理 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是 n 维线性空间 V 的两组基, $1 \leq m < n$, 证明: 存在 $1, 2, \dots, n$ 的排列 $i_1, i_2, \dots, i_n$, 使得 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_{i_{m+1}}, \dots, \beta_{i_n}$ 和 $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_m}, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$ 仍是 V 的两组基。

解答. 设基 β 到基 α 的过渡矩阵为 $C = (c_{ij})_{n \times n}$, 即 $\beta_j = \sum_{k=1}^n c_{kj} \alpha_k$ 。因为 α 和 β 都是基, 过渡矩阵 C 是可逆阵, 有 $\det(C) \neq 0$ 。

按照前 m 行和后 $n-m$ 行对 $\det(C)$ 进行 Laplace 展开:

$$\det(C) = \sum_{|J|=m} (-1)^{\tau(J)} \det(C(1 \dots m; J)) \cdot \det(C(m+1 \dots n; J^c))$$

其中 J 是从 1 到 n 中选取 m 个列下标构成的子集, J^c 是其补集。 $C(1 \dots m; J)$ 表示取前 m 行和 J 列构成的子式。

因为 $\det(C) \neq 0$, 在这个求和式中, **必然存在至少一个子集** $J = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, 使得前后两个余子式均不为零:

$$\det(C(1 \dots m; J)) \neq 0 \quad \text{且} \quad \det(C(m+1 \dots n; J^c)) \neq 0$$

令 $J^c = \{i_{m+1}, \dots, i_n\}$ 。我们现在说明这个排列即为所求:

1. **验证 $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_m}, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$ 是一组基:**

它们在基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 下的坐标构成的矩阵是分块矩阵 $\begin{pmatrix} C(1 \dots m; J) & 0 \\ C(m+1 \dots n; J) & I_{n-m} \end{pmatrix}$ 。该矩阵的行列式恰好等于 $\det(C(1 \dots m; J)) \neq 0$, 故它们线性无关, 是一组基。

2. **验证 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_{i_{m+1}}, \dots, \beta_{i_n}$ 是一组基:**

同理, 它们在基 α 下坐标构成的矩阵经过适当列交换后, 其行列式的绝对值为 $|\det(C(m+1 \dots n; J^c))| \neq 0$, 故它们也线性无关, 是一组基。

□

例题 2.10: 超平面两侧与等价关系 设 V 是有限维实线性空间, 对任意 $\alpha, \beta \in V$, V 中连接 α 和 β 的线段定义为

$$L(\alpha, \beta) = \{t\alpha + (1-t)\beta \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

设 W 是 V 的真子空间, 对任意 $\alpha, \beta \in V - W$, 如果 $L(\alpha, \beta) \cap W = \emptyset$, 则记 $\alpha \equiv \beta$ 。(1) 证明: 如果 $\dim W = \dim V - 1$, 则 $\equiv$ 为集合 $V - W$ 中的等价关系, 且商集合 $(V - W)/\equiv$ 为二元集; (2) 如果不要求 $\dim W = \dim V - 1$, 那么 $\equiv$ 是否还是集合 $V - W$ 中的等价关系? 说明理由。

解答. (1) 当 $\dim W = \dim V - 1$ 时: 此时 W 是超平面。考虑商空间 V/W , 其维数为 $\dim V - (\dim V - 1) = 1$ 。存在一个满射线性泛函 $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}$, 其核为 $\ker(\pi) = W$ 。对于 $\alpha \in V - W$, 有 $\pi(\alpha) \neq 0$ 。

线段 $L(\alpha, \beta) \cap W = \emptyset$ 意味着对于任意的 $t \in [0, 1]$:

$$\pi(t\alpha + (1-t)\beta) = t\pi(\alpha) + (1-t)\pi(\beta) \neq 0$$

这等价于要求非零实数 $\pi(\alpha)$ 和 $\pi(\beta)$ **同号** (若异号, 则线段 $t\pi(\alpha) + (1-t)\pi(\beta)$ 必定在某处穿过 0)。

显然, “ π 映射后的符号相同” 在 $V - W$ 上构成了等价关系 (自反、对称、传递)。由于非零实数的符号只有正和负两种, 所以商集合 $(V - W)/\equiv$ 恰好包含两个等价类 (即超平面的两侧), 为二元集。

(2) 当不要求 $\dim W = \dim V - 1$ 时, $\equiv$ 还是等价关系吗?

结论: 不是等价关系。

理由: 当 $\dim W \leq \dim V - 2$ 时, 关系的传递性不再成立。这时的商空间 V/W 同构于 $\mathbb{R}^k$ (其中 $k \geq 2$)。映射 $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}^k$ 的核依然是 W 。 $\alpha \equiv \beta$ 的几何意义变为: 在 $\mathbb{R}^k$ 空间中, 连接 $\pi(\alpha)$ 和 $\pi(\beta)$ 的线段不经过原点。

在维数 ≥ 2 的空间中, 我们可以轻易构造反例破坏传递性: 取 $\mathbb{R}^k$ 中的三个点: $A = (1, 0, 0, \dots)$, $B = (0, 1, 0, \dots)$, $C = (-1, 0, 0, \dots)$ 。对应在 $V - W$ 中取逆像点 α, β, γ , 使得 $\pi(\alpha) = A, \pi(\beta) = B, \pi(\gamma) = C$ 。

- 线段 $L(A, B)$ 不经过原点, 故 $\alpha \equiv \beta$ 。
- 线段 $L(B, C)$ 不经过原点, 故 $\beta \equiv \gamma$ 。
- 但是线段 $L(A, C)$ 是从 $(1, 0, 0, \dots)$ 到 $(-1, 0, 0, \dots)$ 的直线段, 它必然经过原点 $(0, 0, 0, \dots)$, 因此 $L(\alpha, \gamma) \cap W \neq \emptyset$, 即 $\alpha \not\equiv \gamma$ 。

由于不满足传递性, 此时 $\equiv$ 不再是等价关系。

□