

双线性函数和二次型

秦加俊

2026 年 6 月 20 日

1 二次型的标准形

例题 1.1: 若干常见二次型的标准形 用可逆的变量替换化下列二次型为标准形:

- (1) $\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1};$
- (2) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j;$
- (3) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} x_i x_j;$
- (4) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} |i - j| x_i x_j;$
- (5) $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j;$
- (6) $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, 其中

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

解答. (1) 设

$$Q = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

若 $n = 2m$, 令

$$u_i = x_{2i}, \quad i = 1, \dots, m,$$

并令

$$v_i = x_{2i-1} + x_{2i+1}, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad v_m = x_{2m-1}.$$

则

$$Q = \sum_{i=1}^m u_i v_i.$$

再令

$$y_{2i-1} = \frac{u_i + v_i}{2}, \quad y_{2i} = \frac{u_i - v_i}{2}, \quad i = 1, \dots, m.$$

因为

$$u_i v_i = y_{2i-1}^2 - y_{2i}^2,$$

所以

$$Q \sim y_1^2 - y_2^2 + \cdots + y_{2m-1}^2 - y_{2m}^2.$$

若 $n = 2m + 1$, 令

$$u_i = x_{2i}, \quad v_i = x_{2i-1} + x_{2i+1}, \quad i = 1, \dots, m,$$

并补充一个变量 $y_{2m+1} = x_{2m+1}$ 。则变量替换可逆, 且

$$Q = \sum_{i=1}^m u_i v_i.$$

同理可得

$$Q \sim y_1^2 - y_2^2 + \cdots + y_{2m-1}^2 - y_{2m}^2 + 0 \cdot y_{2m+1}^2.$$

(2) 设

$$Q = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

由恒等式

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j,$$

得

$$Q = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \right].$$

取正交变量替换, 使

$$y_1 = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

于是

$$Q = \frac{1}{2} \left(n y_1^2 - \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) = \frac{n-1}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} (y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

因此

$$Q \sim y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2.$$

(3) 设

$$Q = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} x_i x_j.$$

令

$$z_i = (-1)^i x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

则

$$Q = \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i z_j.$$

由第 (2) 问,

$$Q \sim y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2.$$

(4) 设

$$Q = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |i - j| x_i x_j = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) x_i x_j.$$

令

$$s_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

这是可逆变量替换, 因为

$$x_1 = s_1, \quad x_k = s_k - s_{k-1}, \quad k = 2, \dots, n.$$

注意

$$j - i = \sum_{k=i}^{j-1} 1.$$

因此

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{k=i}^{j-1} x_i x_j \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^k x_i \right) \left(\sum_{j=k+1}^n x_j \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} s_k (s_n - s_k) \\ &= s_n \sum_{k=1}^{n-1} s_k - \sum_{k=1}^{n-1} s_k^2. \end{aligned}$$

配方得

$$Q = - \sum_{k=1}^{n-1} \left(s_k - \frac{s_n}{2} \right)^2 + \frac{n-1}{4} s_n^2.$$

令

$$y_k = s_k - \frac{s_n}{2}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad y_n = \frac{\sqrt{n-1}}{2} s_n.$$

则

$$Q \sim y_n^2 - y_1^2 - \cdots - y_{n-1}^2.$$

(5) 设

$$Q = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

因为

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j,$$

所以

$$Q = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \right].$$

取正交变量替换, 使

$$y_1 = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

则

$$Q = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 + n y_1^2 \right] = \frac{n+1}{2} y_1^2 + \frac{1}{2} (y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

因此

$$Q \sim y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2.$$

(6) 设

$$Q = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

展开得

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2. \end{aligned}$$

取正交变量替换, 使

$$y_1 = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

则

$$Q = \sum_{i=1}^n y_i^2 - y_1^2 = y_2^2 + \cdots + y_n^2.$$

因此标准形为

$$Q \sim 0 \cdot y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2.$$

□

例题 1.2: 平方和型二次型的秩 设二次型

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^s (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)^2,$$

其中 $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, s$, $j = 1, 2, \dots, n$ 。证明: Q 的秩等于矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

的秩。

解答. 令

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T.$$

则

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n \end{pmatrix}.$$

因此

$$Q(X) = (AX)^T(AX) = X^T A^T A X.$$

所以 Q 的矩阵是

$$A^T A.$$

只需证明

$$\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A).$$

显然

$$\ker A \subseteq \ker(A^T A).$$

反过来, 若 $X \in \ker(A^T A)$, 则

$$A^T A X = 0.$$

左乘 X^T , 得

$$X^T A^T A X = 0.$$

即

$$(AX)^T(AX) = 0.$$

由于是在实数域上,

$$(AX)^T(AX) = \|AX\|^2,$$

故 $AX = 0$, 从而 $X \in \ker A$ 。因此

$$\ker(A^T A) = \ker A.$$

由秩-零化度定理可知

$$\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A).$$

所以 Q 的秩等于矩阵 A 的秩。 □

例题 1.3: 顺序主子式非零时的 **Jacobi** 标准形 设 n 维线性空间 V 上的二次型

$$Q(\alpha) = X^T A X,$$

其中 A 是对称矩阵, X 是 α 在该表达式对应的基下的坐标。将 A 的 k 阶顺序主子式记为 D_k , 设

$$D_1, D_2, \dots, D_n$$

都非零。证明: 存在 V 上的可逆坐标变换 $X = PY$, 使得二次型化为

$$Q(\alpha) = D_1 y_1^2 + \frac{D_2}{D_1} y_2^2 + \dots + \frac{D_n}{D_{n-1}} y_n^2.$$

解答. 这是二次型的 Jacobi 标准形。用归纳法证明。

当 $n = 1$ 时, 结论显然成立。设结论对 $n - 1$ 阶对称矩阵成立。把 A 分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ b^T & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 A_{n-1} 是 A 的左上角 $(n - 1)$ 阶顺序主子阵。由于

$$D_{n-1} = \det A_{n-1} \neq 0,$$

所以 A_{n-1} 可逆。

将坐标写为

$$X = \begin{pmatrix} X' \\ x_n \end{pmatrix}.$$

则

$$Q = X'^T A_{n-1} X' + 2x_n b^T X' + a_{nn} x_n^2.$$

作可逆变量替换

$$X' = Y' - A_{n-1}^{-1} b y_n, \quad x_n = y_n.$$

代入得

$$Q = Y'^T A_{n-1} Y' + (a_{nn} - b^T A_{n-1}^{-1} b) y_n^2.$$

由 Schur 补公式,

$$\det A = \det A_{n-1} (a_{nn} - b^T A_{n-1}^{-1} b).$$

因此

$$a_{nn} - b^T A_{n-1}^{-1} b = \frac{D_n}{D_{n-1}}.$$

于是

$$Q = Y'^T A_{n-1} Y' + \frac{D_n}{D_{n-1}} y_n^2.$$

由归纳假设,

$$Y'^T A_{n-1} Y' \sim D_1 y_1^2 + \frac{D_2}{D_1} y_2^2 + \dots + \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}} y_{n-1}^2.$$

所以

$$Q \sim D_1 y_1^2 + \frac{D_2}{D_1} y_2^2 + \cdots + \frac{D_n}{D_{n-1}} y_n^2.$$

证明完毕。 $\square$

例题 1.4: 复二次型 $x_1^2 - x_2^2$ 的保型变换 定义 $\mathbb{C}^2$ 上的二次型

$$Q(\alpha) = x_1^2 - x_2^2, \quad \forall \alpha = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{C}^2.$$

如果 $\mathbb{C}^2$ 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 满足

$$Q(\mathcal{A}(\alpha)) = Q(\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}^2,$$

则称 $\mathcal{A}$ 保二次型 Q 。设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{C}^2$ 上保二次型 Q 的线性变换, 且 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{C}^2$ 的自然基 e_1, e_2 下的矩阵是

$$A = (a_{ij}).$$

证明:

(1) $a_{22} = \pm a_{11}$, $a_{21} = \pm a_{12}$, 且

$$a_{11}^2 - a_{12}^2 = 1.$$

更准确地说, 两处符号应同时取正或同时取负;

(2) 如果 $\det A = 1$, 则存在非零复数 c , 使得

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c + \frac{1}{c} & c - \frac{1}{c} \\ c - \frac{1}{c} & c + \frac{1}{c} \end{pmatrix};$$

如果 $\det A = -1$, 则存在非零复数 c , 使得

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c + \frac{1}{c} & c - \frac{1}{c} \\ -c + \frac{1}{c} & -c - \frac{1}{c} \end{pmatrix}.$$

解答. 设

$$X = (x_1, x_2)^T.$$

由于

$$Q(X) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2),$$

所以

$$\begin{aligned} Q(AX) &= [(a_{11} + a_{21})x_1 + (a_{12} + a_{22})x_2] \\ &\quad \cdot [(a_{11} - a_{21})x_1 + (a_{12} - a_{22})x_2]. \end{aligned}$$

由 $Q(AX) = Q(X)$, 得

$$\begin{aligned} & [(a_{11} + a_{21})x_1 + (a_{12} + a_{22})x_2][(a_{11} - a_{21})x_1 + (a_{12} - a_{22})x_2] \\ &= (x_1 + x_2)(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

由于 $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ 是唯一分解整环, 且 $x_1 + x_2$ 与 $x_1 - x_2$ 不是相伴的线性因子, 因此只有如下两种情形。

第一种情形: 存在 $c \in \mathbb{C}^*$, 使得

$$\begin{cases} (a_{11} + a_{21})x_1 + (a_{12} + a_{22})x_2 = c(x_1 + x_2), \\ (a_{11} - a_{21})x_1 + (a_{12} - a_{22})x_2 = c^{-1}(x_1 - x_2). \end{cases}$$

比较系数, 得

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} = c, \\ a_{12} + a_{22} = c, \\ a_{11} - a_{21} = c^{-1}, \\ a_{12} - a_{22} = -c^{-1}. \end{cases}$$

于是

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{2} \left(c + \frac{1}{c} \right), \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} \left(c - \frac{1}{c} \right).$$

因此

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c + \frac{1}{c} & c - \frac{1}{c} \\ c - \frac{1}{c} & c + \frac{1}{c} \end{pmatrix}.$$

这时

$$\det A = \left[\frac{1}{2} \left(c + \frac{1}{c} \right) \right]^2 - \left[\frac{1}{2} \left(c - \frac{1}{c} \right) \right]^2 = 1.$$

第二种情形: 存在 $c \in \mathbb{C}^*$, 使得

$$\begin{cases} (a_{11} + a_{21})x_1 + (a_{12} + a_{22})x_2 = c^{-1}(x_1 - x_2), \\ (a_{11} - a_{21})x_1 + (a_{12} - a_{22})x_2 = c(x_1 + x_2). \end{cases}$$

比较系数, 得

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} = c^{-1}, \\ a_{12} + a_{22} = -c^{-1}, \\ a_{11} - a_{21} = c, \\ a_{12} - a_{22} = c. \end{cases}$$

于是

$$a_{11} = \frac{1}{2} \left(c + \frac{1}{c} \right), \quad a_{12} = \frac{1}{2} \left(c - \frac{1}{c} \right),$$

且

$$a_{21} = -a_{12}, \quad a_{22} = -a_{11}.$$

因此

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c + \frac{1}{c} & c - \frac{1}{c} \\ -c + \frac{1}{c} & -c - \frac{1}{c} \end{pmatrix}.$$

这时

$$\det A = -1.$$

综上, 若 $\det A = 1$, 则 A 具有第一种形式; 若 $\det A = -1$, 则 A 具有第二种形式。并且两种情形分别给出

$$a_{22} = a_{11}, \quad a_{21} = a_{12},$$

或

$$a_{22} = -a_{11}, \quad a_{21} = -a_{12}.$$

同时都有

$$a_{11}^2 - a_{12}^2 = 1.$$

证明完毕。 □

2 矩阵的相似、合同与合同标准形

例题 2.1: 相似与合同的判别 设有实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

证明:

(1) A 和 B 相似的充分必要条件是

$$a = 3, \quad b = \frac{2}{3};$$

(2) A 和 B 合同的充分必要条件是

$$a < 2, \quad b = 3.$$

解答. (1) 若 A 与 B 相似, 则它们有相同的迹和行列式。由

$$\operatorname{tr} A = a + 2, \quad \operatorname{tr} B = 5,$$

得

$$a = 3.$$

又

$$\det A = 2a - 4, \quad \det B = 4 - 3b.$$

代入 $a = 3$, 得

$$2 = 4 - 3b,$$

即

$$b = \frac{2}{3}.$$

反过来, 当 $a = 3, b = \frac{2}{3}$ 时,

$$\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 2.$$

该多项式判别式为

$$25 - 8 = 17 \neq 0,$$

所以 A, B 都有两个不同特征值, 因而都可对角化, 并且相似于同一个对角矩阵。因此 A 与 B 相似。

(2) 若 A 与 B 合同, 则存在可逆矩阵 P , 使得

$$B = P^T A P.$$

由于 A 是对称矩阵, 所以 $P^T A P$ 也是对称矩阵。因此 B 必须对称, 从而

$$b = 3.$$

此时

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

且

$$\det B = 4 - 9 = -5 < 0.$$

所以 B 的正负惯性指数为 $(1, 1)$ 。

对于

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix},$$

有

$$\det A = 2a - 4 = 2(a - 2).$$

因为左上角元素 $2 > 0$, 所以当且仅当

$$a < 2$$

时, A 的行列式为负, 从而 A 的正负惯性指数也是 $(1, 1)$ 。

根据实对称矩阵的合同分类定理, 两个实对称矩阵合同当且仅当它们有相同的正负惯性指数。因此 A 与 B 合同当且仅当

$$a < 2, \quad b = 3.$$

□

例题 2.2: 实对称方阵的合同标准形 求下列实对称方阵的合同标准形:

(1)

$$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_n & O \end{pmatrix};$$

(2)

$$\begin{pmatrix} O & E_n & O \\ E_n & O & O \\ O & O & 1 \end{pmatrix};$$

(3) 反单位矩阵

$$J_n = (\delta_{i,n+1-j})_{n \times n};$$

(4)

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

解答. (1) 设对应二次型为

$$Q(x, y) = 2x^T y, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

令

$$u = x + y, \quad v = x - y.$$

则

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2},$$

并且

$$2x^T y = \frac{1}{2}(u^T u - v^T v).$$

因此其合同标准形为

$$\text{diag}(E_n, -E_n).$$

(2) 对应二次型为

$$Q(x, y, z) = 2x^T y + z^2.$$

由第 (1) 问可知 $2x^T y$ 的标准形为

$$u_1^2 + \cdots + u_n^2 - v_1^2 - \cdots - v_n^2.$$

再加上 z^2 , 所以合同标准形为

$$\text{diag}(E_{n+1}, -E_n).$$

(3) 设 J_n 为反单位矩阵。若 $n = 2m$, 则对应二次型为

$$Q = 2x_1x_{2m} + 2x_2x_{2m-1} + \cdots + 2x_mx_{m+1}.$$

每一项 $2uv$ 都可化为一个正平方减一个负平方, 因此

$$J_{2m} \sim \text{diag}(E_m, -E_m).$$

若 $n = 2m + 1$, 则

$$Q = 2x_1x_{2m+1} + 2x_2x_{2m} + \cdots + 2x_mx_{m+2} + x_{m+1}^2.$$

因此

$$J_{2m+1} \sim \text{diag}(E_{m+1}, -E_m).$$

(4) 记 D_k 为 T_n 的 k 阶顺序主子式。则

$$D_0 = 1, \quad D_1 = 1,$$

且由三对角行列式递推公式,

$$D_k = D_{k-1} - \frac{1}{4}D_{k-2}.$$

容易归纳得到

$$D_k = \frac{k+1}{2^k} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

因此 T_n 的所有顺序主子式均为正。由 Sylvester 判别法, T_n 正定。所以其合同标准形为

$$E_n.$$

□

例题 2.3: 复对称方阵的合同标准形 求下列复对称方阵的合同标准形, 其中 $i^2 = -1$:

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+i & \cdots & n+i \\ 1+i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2+i & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+i & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix};$$

(2)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{i}{2} & 1 & \frac{i}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{i}{2} & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

解答. 在复数域上, 任意复对称矩阵按合同分类时, 标准形只由秩决定: 秩为 r 的复对称矩阵合同于

$$\text{diag}(E_r, O).$$

因此只需求矩阵的秩。

(1) 按题中写法, A 是 $(n+1)$ 阶矩阵。记

$$v = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2+i \\ \vdots \\ n+i \end{pmatrix}.$$

则

$$A = \begin{pmatrix} 1 & v^T \\ v & E_n \end{pmatrix}.$$

由 Schur 补公式,

$$\det A = \det E_n \cdot (1 - v^T v) = 1 - \sum_{k=1}^n (k+i)^2.$$

注意

$$\sum_{k=1}^n (k+i)^2 = \sum_{k=1}^n (k^2 - 1) + 2i \sum_{k=1}^n k.$$

其虚部为

$$2 \sum_{k=1}^n k = n(n+1) \neq 0.$$

因此

$$1 - \sum_{k=1}^n (k+i)^2 \neq 0.$$

所以 A 满秩, 合同标准形为

$$E_{n+1}.$$

(2) 记 D_k 为 B 的 k 阶顺序主子式。则

$$D_0 = 1, \quad D_1 = 1,$$

且

$$D_k = D_{k-1} - \left(\frac{i}{2}\right)^2 D_{k-2} = D_{k-1} + \frac{1}{4} D_{k-2}.$$

因为 $D_0, D_1 > 0$, 由递推式可知

$$D_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

特别地,

$$\det B = D_n \neq 0.$$

所以 B 满秩. 于是其复合同标准形为

$$E_n.$$

□

例题 2.4: 正交变换下不变的双线性函数 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的双线性函数. 如果对 $\mathbb{R}^n$ 上任意的正交变换 $\mathcal{A}$, 有

$$f(\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\beta)) = f(\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n,$$

则称 f 在正交变换下不变. 求 $\mathbb{R}^n$ 上所有在正交变换下不变的双线性函数。

解答. 设 f 在自然基下的矩阵为 M , 即

$$f(\alpha, \beta) = X^T M Y.$$

若正交变换 $\mathcal{A}$ 的矩阵为 P , 则条件变为

$$(PX)^T M (PY) = X^T M Y, \quad \forall X, Y.$$

所以

$$P^T M P = M, \quad \forall P \in O(n).$$

由于 $P^{-1} = P^T$, 这等价于

$$MP = PM, \quad \forall P \in O(n).$$

先取

$$P = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

由 $MP = PM$ 可得

$$m_{ij} \varepsilon_j = \varepsilon_i m_{ij}.$$

当 $i \neq j$ 时, 可取 $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$, 从而

$$m_{ij} = 0.$$

因此 M 是对角矩阵。

再取任意置换矩阵 P 。由 $MP = PM$ 可知 M 的所有对角元相等。因此存在常数 $c \in \mathbb{R}$, 使得

$$M = cE_n.$$

所以

$$f(\alpha, \beta) = c \alpha^T \beta.$$

反过来, 任意

$$f(\alpha, \beta) = c \alpha^T \beta$$

显然在所有正交变换下不变。故全部答案为

$$f(\alpha, \beta) = c \langle \alpha, \beta \rangle, \quad c \in \mathbb{R}.$$

□

3 正定矩阵与半正定矩阵

例题 3.1: 实对称矩阵的立方根 设 A 是 n 阶实对称矩阵。证明: 存在唯一的 n 阶实对称矩阵 B , 使得

$$A = B^3.$$

方阵 B 称为方阵 A 的立方根, 记为

$$\sqrt[3]{A}.$$

解答. 由于 A 是实对称矩阵, 由谱定理, 存在正交矩阵 P , 使得

$$P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

令

$$B = P \text{diag} \left(\sqrt[3]{\lambda_1}, \sqrt[3]{\lambda_2}, \dots, \sqrt[3]{\lambda_n} \right) P^T.$$

则 B 是实对称矩阵, 并且

$$B^3 = P \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) P^T = A.$$

所以存在性成立。

下面证明唯一性。设 C 也是实对称矩阵, 且

$$C^3 = A.$$

则

$$CA = CC^3 = C^4 = C^3C = AC,$$

所以 C 与 A 可交换。于是 C 保持 A 的每个特征子空间。

设 E_λ 是 A 关于特征值 λ 的特征子空间。对任意 $x \in E_\lambda$, 有

$$Ax = \lambda x.$$

又因为 C 保持 E_λ , 所以 $C|_{E_\lambda}$ 是 E_λ 上的实对称线性变换, 并满足

$$(C|_{E_\lambda})^3 = \lambda I.$$

由于 $C|_{E_\lambda}$ 实对称, 可正交对角化, 其每个特征值 μ 都满足

$$\mu^3 = \lambda.$$

实数范围内该方程只有唯一实根

$$\mu = \sqrt[3]{\lambda}.$$

因此

$$C|_{E_\lambda} = \sqrt[3]{\lambda} I.$$

这说明 C 在每个特征子空间上的作用都被唯一确定, 所以 $C = B$ 。唯一性成立。 $\square$

例题 3.2: 一个正定矩阵时的同时合同对角化 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵, 其中 B 是正定的。证明: A 和 B 可以同时合同对角化。

解答. 因为 B 正定, 所以存在实对称正定矩阵 $B^{1/2}$, 并且

$$B = B^{1/2} B^{1/2}.$$

令

$$C = B^{-1/2}.$$

则

$$C^T B C = E_n.$$

同时

$$C^T A C = B^{-1/2} A B^{-1/2}$$

仍是实对称矩阵。由谱定理, 存在正交矩阵 U , 使得

$$U^T (C^T A C) U$$

为对角矩阵。

令

$$P = C U.$$

于是

$$P^T B P = U^T C^T B C U = U^T U = E_n,$$

而

$$P^T A P = U^T (C^T A C) U$$

是对角矩阵。因此 A 和 B 可以同时合同对角化。 $\square$

例题 3.3: 两个半正定矩阵的同时合同对角化 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵, 且都是半正定的。证明: A 和 B 可以同时合同对角化。

解答. 令

$$K = \ker(A + B).$$

由于 A, B 半正定, 对任意 x , 若

$$x^T(A + B)x = 0,$$

则

$$x^T Ax + x^T Bx = 0.$$

而两项均非负, 所以

$$x^T Ax = 0, \quad x^T Bx = 0.$$

对半正定矩阵, $x^T Ax = 0$ 蕴含 $Ax = 0$ 。因此

$$\ker(A + B) = \ker A \cap \ker B.$$

取正交分解

$$\mathbb{R}^n = K^\perp \oplus K.$$

在 K 上, A 和 B 都为零。下面只需考虑 $K^\perp$ 。

在 $K^\perp$ 上, $A + B$ 是正定的。事实上, 若 $0 \neq x \in K^\perp$ 且

$$x^T(A + B)x = 0,$$

则由上面的讨论可知 $x \in K$, 与 $x \in K^\perp$ 且 $x \neq 0$ 矛盾。

因此在 $K^\perp$ 上, 实对称矩阵 A 与正定矩阵 $A + B$ 可以同时合同对角化。于是 A 与 $A + B$ 同时化为对角矩阵。由于

$$B = (A + B) - A,$$

所以 B 也同时被化为对角矩阵。

再加上 K 上的零块, 便得到 A 和 B 在整个 $\mathbb{R}^n$ 上可以同时合同对角化。□

例题 3.4: 正定矩阵乘积的特征值 设 n 阶实对称矩阵 A 和 B 都是正定的。证明: AB 的所有特征值都是正数。

解答. 因为 B 正定, 所以 $B^{1/2}$ 存在且可逆。注意

$$AB = B^{-1/2}(B^{1/2}AB^{1/2})B^{1/2}.$$

因此 AB 与

$$B^{1/2}AB^{1/2}$$

相似。

而

$$B^{1/2}AB^{1/2}$$

是实对称矩阵。并且对任意非零向量 x ,

$$x^T B^{1/2}AB^{1/2}x = (B^{1/2}x)^T A(B^{1/2}x) > 0.$$

所以 $B^{1/2}AB^{1/2}$ 是正定矩阵, 其所有特征值均为正数。相似矩阵有相同的特征值, 因此 AB 的所有特征值都是正数。□

例题 3.5: 半正定矩阵行列式的不等式 设 n 阶实对称矩阵 A 和 B 都是半正定的。证明:

$$\det(A+B) \geq \det A + \det B.$$

解答. 由上一题, 半正定实对称矩阵 A, B 可以同时合同对角化。故存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^TAP = \text{diag}(a_1, \dots, a_n), \quad P^TBP = \text{diag}(b_1, \dots, b_n),$$

其中

$$a_i \geq 0, \quad b_i \geq 0.$$

于是

$$P^T(A+B)P = \text{diag}(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n).$$

记

$$d = (\det P)^2 > 0.$$

则

$$d \det A = \prod_{i=1}^n a_i, \quad d \det B = \prod_{i=1}^n b_i,$$

并且

$$d \det(A+B) = \prod_{i=1}^n (a_i + b_i).$$

由于 $a_i, b_i \geq 0$, 有

$$\prod_{i=1}^n (a_i + b_i) \geq \prod_{i=1}^n a_i + \prod_{i=1}^n b_i.$$

因此

$$d \det(A+B) \geq d \det A + d \det B.$$

两边同除以 $d > 0$, 得

$$\det(A+B) \geq \det A + \det B.$$

□

例题 3.6: Fischer 不等式与 Hadamard 型不等式 设 n 阶实对称矩阵 $A = (a_{ij})$ 是半正定的。证明：

(1) 对 $k = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\det A \leq \det A[\{1, \dots, k\}] \cdot \det A[\{k+1, \dots, n\}],$$

其中 $A[I]$ 表示由指标集 I 对应的主子矩阵, 并约定空矩阵的行列式为 1;

(2)

$$\det A \leq a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

若进一步假设 A 正定, 则等号成立当且仅当 A 是对角矩阵。

解答. (1) 先证明 A 正定的情形。将 A 分块为

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix},$$

其中 $B = A[\{1, \dots, k\}]$, $D = A[\{k+1, \dots, n\}]$ 。因为 A 正定, 所以 B, D 都正定。

由 Schur 补公式,

$$\det A = \det B \cdot \det(D - C^T B^{-1} C).$$

又

$$D - C^T B^{-1} C$$

是半正定矩阵, 并且

$$0 \leq D - C^T B^{-1} C \leq D.$$

于是

$$\det(D - C^T B^{-1} C) \leq \det D.$$

因此

$$\det A \leq \det B \det D.$$

对一般半正定矩阵 A , 考虑

$$A_\varepsilon = A + \varepsilon E_n, \quad \varepsilon > 0.$$

则 A_ε 正定, 由正定情形有

$$\det A_\varepsilon \leq \det A_\varepsilon[\{1, \dots, k\}] \cdot \det A_\varepsilon[\{k+1, \dots, n\}].$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 由行列式关于矩阵元素的连续性, 得到半正定情形的结论。

(2) 对第 (1) 问反复使用, 得到

$$\det A \leq a_{11} \det A[\{2, \dots, n\}] \leq a_{11}a_{22} \det A[\{3, \dots, n\}] \leq \cdots \leq a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

下面讨论等号条件。若 A 正定，则上述每一步 Fischer 不等式取等号当且仅当对应的非对角分块为零。逐步应用可知，等号成立当且仅当所有非对角元均为零，即 A 是对角矩阵。需要注意：若只假设 A 半正定，则“等号成立当且仅当 A 是对角矩阵”并不严格成立。例如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

是半正定矩阵，并且

$$\det A = 0 = a_{11}a_{22}a_{33},$$

但 A 不是对角矩阵。因此等号条件通常需要附加正定性，或者对零对角元情形另行讨论。□

例题 3.7: Hadamard 不等式 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶实方阵，证明：

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

若 A 的每个列向量均非零，则等号成立当且仅当 A 的 n 个列向量两两正交。

解答. 记 A 的列向量为

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n.$$

考虑 Gram 矩阵

$$G = A^T A.$$

则

$$G = (\alpha_i^T \alpha_j)_{i,j=1}^n.$$

它是半正定实对称矩阵，并且

$$\det G = \det(A^T A) = (\det A)^2.$$

由上一题的 Hadamard 型不等式，

$$\det G \leq g_{11}g_{22} \cdots g_{nn}.$$

而

$$g_{jj} = \alpha_j^T \alpha_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}^2.$$

所以

$$(\det A)^2 \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \right).$$

两边开方，得

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

若每个列向量均非零，则等号成立当且仅当 Gram 矩阵 G 在上一题的不等式中取等号。此时等价于 G 为对角矩阵，即

$$\alpha_i^T \alpha_j = 0, \quad i \neq j.$$

这就是说， A 的 n 个列向量两两正交。

注意：Hadamard 不等式的标准形式应写为带绝对值的

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^n \|\alpha_j\|.$$

如果不加绝对值，则当 $\det A < 0$ 时等号条件会出现取向问题。

□