

重积分讲义

秦加俊

2026 年 6 月 20 日

知识 0.1: 重积分换元公式

【坐标系变换与雅可比行列式】

- 一般变量代换 (雅可比行列式):

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

- 极坐标变换 ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$)

微元替换: $dx dy \rightarrow r dr d\theta$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

- 柱坐标变换 ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$)

微元替换: $dx dy dz \rightarrow r dr d\theta dz$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

- 球坐标变换 ($x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi$)

微元替换: $dx dy dz \rightarrow r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(x(r, \varphi, \theta), \dots) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$$

知识 0.2: 重积分 (二重、三重) 的一般计算步骤

重积分的核心计算思想是: “化重积分为累次积分 (单积分的嵌套)”。无论是二重还是三重积分, 按如下四步走:

Step 1. 画图确定积分区域

画出积分区域 D (二维) 或 Ω (三维) 的草图, 并求出边界交点。如果不画图直接硬算, 极易在定限时出错。

Step 2. 选择坐标系

观察积分区域的形状和被积函数的结构。

- 若区域含圆/扇形, 或含有 $x^2 + y^2$, 可选用**极坐标** (切记面积微元多乘一个 r : $dx dy = r dr d\theta$)。
- 若区域为旋转体, 选用**柱坐标**; 若含球体或 $x^2 + y^2 + z^2$, 选用**球坐标** (体积微元多乘 $r^2 \sin \varphi$)。
- 一般换元, 这种区域特点很明显。

Step 3. 确定积分顺序

画一条平行于某坐标轴的射线穿过区域。

- **内层积分**: 射线的“穿入点”是下限, “穿出点”是上限 (通常是变量的函数)。
- **外层积分**: 将区域投影到某条轴或某个面上, 投影的极值就是外层积分的常数上下限。

Step 4. 由内向外, 逐层积分

计算内层积分时, 将外层变量视为常数。若发现某一层“积不出” (如 e^{x^2}), 立刻返回 Step 3 **交换积分次序**, 也可能要回到 Step 2 **换元**, 引入坐标变换积分微元多出来的函数。

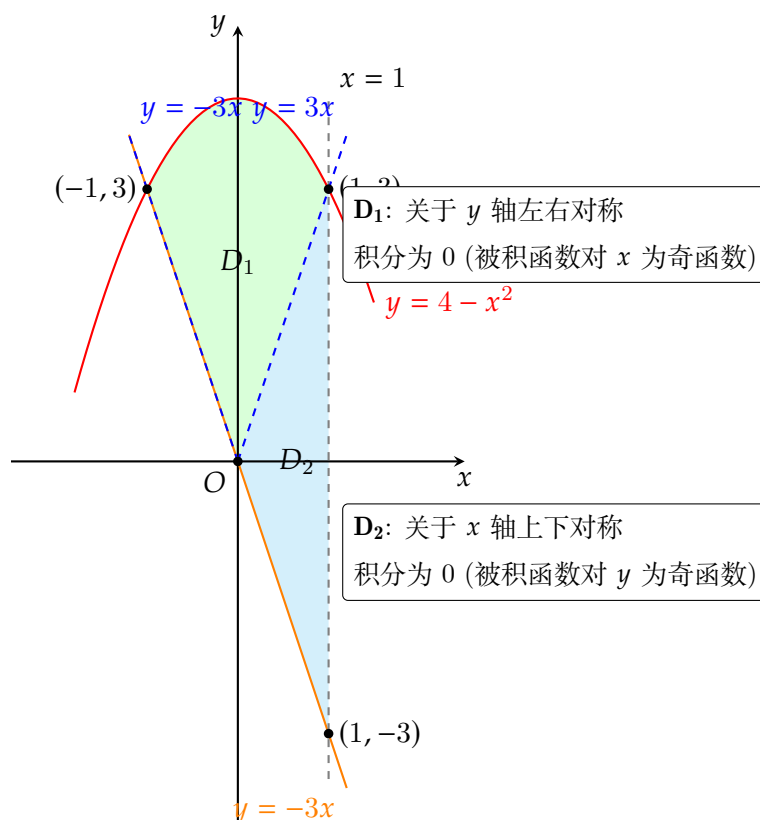
注意奇偶对称性对于积分计算的简化

1 二重积分

1.1 关注一下奇对称性

例题 1.1: 区域切割 计算二重积分 $\iint_D x \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) dx dy$, 其中 D 是曲线 $y = 4 - x^2$, 直线 $y = -3x$ 及直线 $x = 1$ 围成的位于直线 $x = 1$ 左边的部分。

解析 1.1: 图示与思路



解答. 观察被积函数天生的“双重奇性”，并通过几何辅助线切割区域，各自相消。

第一步：挖掘被积函数的双重奇性

令被积函数 $f(x, y) = x \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$ ，它同时具备：

- 关于 x 是奇函数： $f(-x, y) = -x \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) = -f(x, y)$
- 关于 y 是奇函数： $f(x, -y) = x \ln(-y + \sqrt{1 + y^2}) = x \ln \frac{1}{y + \sqrt{1 + y^2}} = -f(x, y)$

第二步：引入辅助线，分割区域

联立边界方程 $4 - x^2 = -3x$ ，解得交点 $x = -1$ 和 $x = 4$ 。由题意知积分区间为 $x \in [-1, 1]$ ，原区域 D 的上下界为： $-3x \leq y \leq 4 - x^2$ 。

为了分别利用 x 和 y 的奇偶性，我们引入辅助线 $y = 3x$ ，将原区域 D 切割为 D_1 和 D_2 两个部分：

$$I = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

第三步：分别利用对称性清零

结论：

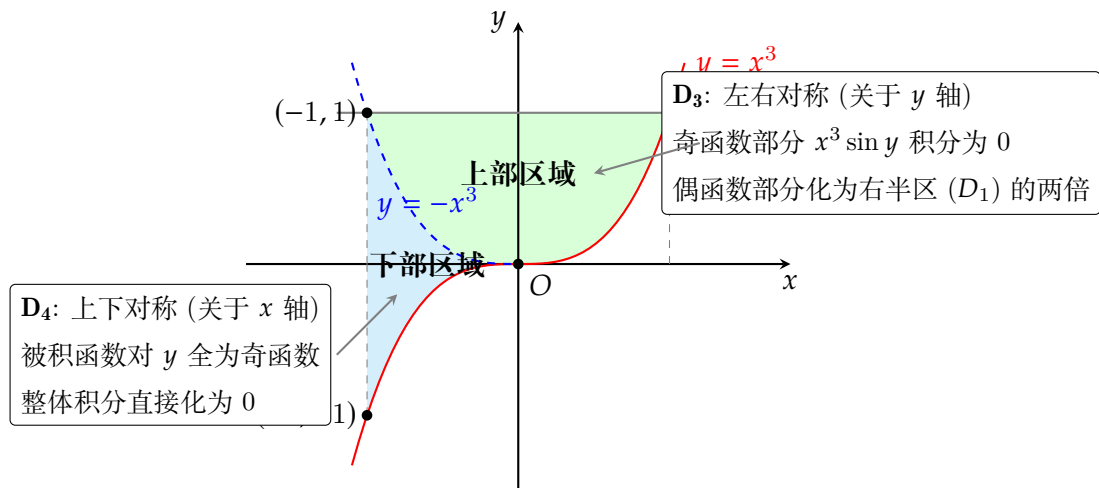
$$I = 0 + 0 = 0$$

□

例题 1.2: 对称区域切割 如果设 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq 1\}$, $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq 1\}$, 则 $\iint_D (x^3 \sin y + y^3 \cos x) dx dy =$ ()。

A. $2 \iint_{D_1} y^3 \cos x dx dy$ B. $2 \iint_{D_1} x^3 \sin y dx dy$ C. $4 \iint_{D_1} (x^3 \sin y + y^3 \cos x) dx dy$ D. 0

解析 1.2: 图示与思路



解答. 正确答案选 A。

面对 D 这个非对称区域, 我们可以借鉴上一题的思路: 引入几何辅助线, 将区域切割成几个“对称区域”, 分别利用奇偶性。

结论:

$$I = 0 + 2 \iint_{D_1} y^3 \cos x dx dy$$

□

1.2 常规计算

例题 1.3: 二重积分的基础计算 计算二重积分: $I = \iint_D |x - y^2| dx dy$ 。其中, 平面区域 D 满足 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 。

解析 1.3: 解析

本题带有绝对值, 核心思路是“按正负拆分积分区域”。令 $x - y^2 = 0$, 即 $x = y^2$ 。这条抛物线将正方形区域 D 划分成了两部分:

- $D_1: x \geq y^2$ (此时 $x - y^2 \geq 0$)
- $D_2: x \leq y^2$ (此时 $x - y^2 \leq 0$)

解答. 为了计算方便, 我们选择 “先 x 后 y ” (即 Y-型区域) 的积分顺序:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} (x - y^2) dx dy + \iint_{D_2} (y^2 - x) dx dy \\ &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 (x - y^2) dx + \int_0^1 dy \int_0^{y^2} (y^2 - x) dx \end{aligned}$$

分别计算内层积分:

$$\int_{y^2}^1 (x - y^2) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - y^2x \right]_{y^2}^1 = \left(\frac{1}{2} - y^2 \right) - \left(\frac{1}{2}y^4 - y^4 \right) = \frac{1}{2} - y^2 + \frac{1}{2}y^4$$

$$\int_0^{y^2} (y^2 - x) dx = \left[y^2x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{y^2} = y^4 - \frac{1}{2}y^4 = \frac{1}{2}y^4$$

代入外层积分:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - y^2 + y^4 \right) dy \\ &= \left[\frac{1}{2}y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15 - 10 + 6}{30} = \frac{11}{30} \end{aligned}$$

□

例题 1.4: 利用积分区域对称性 计算 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x, y = x + a, y = a, y = 3a (a > 0)$ 所围成的区域。

解答. 【解法一: 看作 Y 型区域】

积分区间为 $y \in [a, 3a]$ 。将二重积分化为先对 x 、后对 y 的累次积分:

$$I = \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2 + y^2) dx$$

先计算内层关于 x 的定积分 (将 y 视为常数):

$$\begin{aligned} \int_{y-a}^y (x^2 + y^2) dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 + xy^2 \right]_{y-a}^y \\ &= \left(\frac{1}{3}y^3 + y^3 \right) - \left[\frac{1}{3}(y-a)^3 + (y-a)y^2 \right] \\ &= \frac{4}{3}y^3 - \left[\frac{1}{3}(y^3 - 3y^2a + 3ya^2 - a^3) + y^3 - ay^2 \right] \\ &= \frac{4}{3}y^3 - \left(\frac{4}{3}y^3 - 2ay^2 + a^2y - \frac{1}{3}a^3 \right) \\ &= 2ay^2 - a^2y + \frac{1}{3}a^3 \end{aligned}$$

将内层结果代入外层关于 y 的积分:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^{3a} \left(2ay^2 - a^2y + \frac{1}{3}a^3 \right) dy \\ &= \left[\frac{2}{3}ay^3 - \frac{1}{2}a^2y^2 + \frac{1}{3}a^3y \right]_a^{3a} \end{aligned}$$

代入上下限:

$$\circ \text{ 上限 } 3a: \frac{2}{3}a(27a^3) - \frac{1}{2}a^2(9a^2) + \frac{1}{3}a^3(3a) = 18a^4 - \frac{9}{2}a^4 + a^4 = \frac{29}{2}a^4$$

$$\circ \text{ 下限 } a: \frac{2}{3}a^4 - \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{3}a^4 = \frac{1}{2}a^4$$

两式相减得到最终结果:

$$I = \frac{29}{2}a^4 - \frac{1}{2}a^4 = 14a^4$$

【解法二: 用换元把平行四边形拉回到长方形】

令 $u = y - x, v = y$, 则积分区域变为矩形 $D': 0 \leq u \leq a, a \leq v \leq 3a$ 。逆变换为 $x = v - u, y = v$ 。计算雅可比行列式:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \implies |J| = 1$$

将被积函数化为新变量: $x^2 + y^2 = (v - u)^2 + v^2 = 2v^2 - 2uv + u^2$ 。代入换元公式:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} (2v^2 - 2uv + u^2) |J| du dv \\ &= \int_a^{3a} dv \int_0^a (2v^2 - 2uv + u^2) du \\ &= \int_a^{3a} \left[2v^2u - vu^2 + \frac{1}{3}u^3 \right]_0^a dv \\ &= \int_a^{3a} \left(2av^2 - a^2v + \frac{1}{3}a^3 \right) dv \\ &= \left[\frac{2}{3}av^3 - \frac{1}{2}a^2v^2 + \frac{1}{3}a^3v \right]_a^{3a} \end{aligned}$$

代入上下限计算:

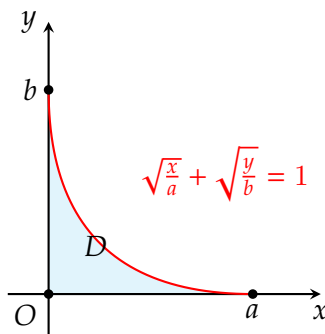
$$\text{上限 } 3a: \frac{2}{3}a(27a^3) - \frac{1}{2}a^2(9a^2) + \frac{1}{3}a^3(3a) = 18a^4 - \frac{9}{2}a^4 + a^4 = \frac{29}{2}a^4$$

$$\text{下限 } a: \frac{2}{3}a^4 - \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{3}a^4 = \frac{1}{2}a^4$$

相减得到最终结果: $I = \frac{29}{2}a^4 - \frac{1}{2}a^4 = 14a^4$ 。 □

例题 1.5: 曲线围成区域的重积分计算 (变量代换法) 计算 $I = \iint_D y dx dy$, 其中 D 是由曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ 及 x 轴和 y 轴围成, 其中 $a > 0, b > 0$ 。

解析 1.4: 图示



解答一: 直角坐标. 【解法一: 常规做法】

如果不换元, 我们可以直接在直角坐标系下将其视为 X-型区域进行积分。

第一步: 化简边界方程并定限

由曲线方程 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$, 分离出 y :

$$\sqrt{\frac{y}{b}} = 1 - \sqrt{\frac{x}{a}} \Rightarrow y = b \left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2$$

显然, 积分区域 D 在 x 轴上的投影区间为 $[0, a]$ 。对于任意给定的 $x \in [0, a]$, 纵向穿线的下限为 $y = 0$, 上限为 $y = b \left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2$ 。于是, 二重积分化为累次积分:

$$I = \int_0^a dx \int_0^{b(1-\sqrt{\frac{x}{a}})^2} y dy$$

第二步: 计算内层关于 y 的积分

$$\int_0^{b(1-\sqrt{\frac{x}{a}})^2} y dy = \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{b(1-\sqrt{\frac{x}{a}})^2} = \frac{1}{2} b^2 \left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\right)^4$$

□

注记 1.1: 方法取舍

这个直接按 X 型区域计算的方案会带来 4 次方展开, 计算量偏大。通过观察应该能发现, 先对 x 积分更方便。

解析 1.5: 视角选取

如果将其看作 X 型区域 (先 y 后 x), 代入上限后会产生 4 次方展开式, 极易算错; 但如果将其看作 Y 型区域 (先 x 后 y), 因为被积函数没有 x , 积分后仅仅产生 2 次方, 计算量大幅骤减。

解答二: Y 型区域. 第一步: 化简边界方程并定限

由曲线方程 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$, 反解出 x :

$$\sqrt{\frac{x}{a}} = 1 - \sqrt{\frac{y}{b}} \Rightarrow x = a \left(1 - \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2$$

积分区域 D 在 y 轴上的投影区间为 $[0, b]$ 。对于任意给定的 $y \in [0, b]$, 横向穿线的下限为 $x = 0$, 上限为 $x = a\left(1 - \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2$ 。于是, 二重积分化为先对 x 、后对 y 的累次积分:

$$I = \int_0^b dy \int_0^{a\left(1 - \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2} y dx$$

第二步: 计算内层关于 x 的积分

因为内层是对 x 积分, y 视为常数, 直接积出一个 x 即可:

$$\int_0^{a\left(1 - \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2} y dx = y \cdot [x]_0^{a\left(1 - \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2} = ay \left(1 - \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2$$

第三步: 计算外层关于 y 的积分 (直接展开)

将内层结果代入外层。由于括号外自带一个 y , 且括号内只是一个完全平方, 我们可以极其轻松地将其展开成幂函数相加的形式:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^b ay \left(1 - 2\sqrt{\frac{y}{b}} + \frac{y}{b}\right) dy \\ &= a \int_0^b \left(y - \frac{2}{\sqrt{b}} y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{b} y^2\right) dy \\ &= a \left[\frac{1}{2} y^2 - \frac{2}{\sqrt{b}} \cdot \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{3} y^3\right]_0^b \end{aligned}$$

代入上限 b (下限代入全为 0):

$$\begin{aligned} I &= a \left(\frac{1}{2} b^2 - \frac{4}{5} b^2 + \frac{1}{3} b^2\right) \\ &= ab^2 \left(\frac{15 - 24 + 10}{30}\right) = \frac{ab^2}{30} \end{aligned}$$

□

注记 1.2: 考场提醒

在考场上, 这种通过切换积分次序来规避高次幂展开的技巧, 往往能救大命!

解析 1.6: 变量代换

采用变量替换可以将区域化为标准三角形; 换元后仍要继续选择合适的积分次序。

解答三: 变量代换为三角形. 第一步: 引入变量代换化简区域

令 $u = \sqrt{\frac{x}{a}}, v = \sqrt{\frac{y}{b}}$ 。则原边界方程化为了标准直线 $u + v = 1$ 。由于 x, y 均在第一象限, 新区域变为了 uv 平面上的一个直角三角形 $D' : u + v \leq 1, u \geq 0, v \geq 0$ 。由代换公式可知原变量为 $x = au^2, y = bv^2$ 。

第二步: 计算雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2au & 0 \\ 0 & 2bv \end{vmatrix} = 4abuv$$

由于在第一象限 $u > 0, v > 0$, 雅可比行列式的绝对值 $|J| = 4abuv$ 。因此面积微元 $dxdy = 4abuv dudv$ 。

第三步：在新区域上进行积分

将被积函数 $y = bv^2$ 和面积微元一同代入，并对三角形区域 D' 穿线定限（先 v 后 u ）：

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} (bv^2) \cdot (4abuv) \, du \, dv \\ &= 4ab^2 \iint_{D'} uv^3 \, du \, dv \\ &= 4ab^2 \int_0^1 du \int_0^{1-u} uv^3 \, dv \end{aligned}$$

□

解析 1.7: 积分次序

通过观察，这里仍然是先 u 后 v 更合适。

解答四：三角形区域的简便次序. 第三步：在新区域上进行积分（先 u 后 v 极其简便）

为了避免高次幂展开，我们选择**先对 u 积分、后对 v 积分**：

$$I = 4ab^2 \int_0^1 dv \int_0^{1-v} uv^3 \, du$$

先计算内层关于 u 的定积分（将 v 视为常数）：

$$\int_0^{1-v} uv^3 \, du = v^3 \left[\frac{1}{2}u^2 \right]_0^{1-v} = \frac{1}{2}v^3(1-v)^2$$

第四步：计算外层的一元定积分

将内层结果代回外层积分：

$$I = 4ab^2 \int_0^1 \frac{1}{2}v^3(1-v)^2 \, dv = 2ab^2 \int_0^1 v^3(1-v)^2 \, dv$$

此时，括号内仅仅是一个完全平方，直接将其展开，计算极其轻松：

$$\begin{aligned} I &= 2ab^2 \int_0^1 v^3(1-2v+v^2) \, dv \\ &= 2ab^2 \int_0^1 (v^3-2v^4+v^5) \, dv \\ &= 2ab^2 \left[\frac{1}{4}v^4 - \frac{2}{5}v^5 + \frac{1}{6}v^6 \right]_0^1 \\ &= 2ab^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \right) \end{aligned}$$

通分计算括号内的值（公分母为 60）：

$$I = 2ab^2 \left(\frac{15-24+10}{60} \right) = 2ab^2 \left(\frac{1}{60} \right) = \frac{ab^2}{30}$$

□

注记 1.3: 教学小结

这道题在换元后，再次向我们展示了“**选择合适积分次序**”的威力。先 u 后 v 只需展开 2 次方，而先 v 后 u 则需要展开 4 次方。做重积分时，“多看一眼，少算一半”！

解析 1.8: 坐标变换

也可以进一步换元, 把边界拉成四分之一圆盘. 这个方法能体现换元思想, 但本题中计算不如三角形换元轻便.

解答五: 坐标变换拉成扇形. 面对方程 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$, 如果我们想将其化为一个标准的“扇形(圆面)”区域, 就需要凑出 $u^2 + v^2 = 1$ 的形式.

第一步: 非线性换元, 将区域化为单位圆的四分之一

令 $\sqrt{\frac{x}{a}} = u^2$, $\sqrt{\frac{y}{b}} = v^2$. 这等价于作变量代换: $x = au^4$, $y = bv^4$ ($u \geq 0, v \geq 0$). 在此变换下, 原边界变成了 $u^2 + v^2 = 1$. 因此, 积分区域被完美映射为 uv 平面内第一象限的四分之一单位圆盘 $D_{uv}: u^2 + v^2 \leq 1, u \geq 0, v \geq 0$.

第二步: 计算雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 4au^3 & 0 \\ 0 & 4bv^3 \end{vmatrix} = 16abu^3v^3$$

因为 u, v 在第一象限, 所以面积微元 $dxdy = 16abu^3v^3 dudv$.

第三步: 在 uv 平面上引入极坐标系

将被积函数 $y = bv^4$ 和微元代入二重积分:

$$I = \iint_{D_{uv}} (bv^4) \cdot (16abu^3v^3) dudv = 16ab^2 \iint_{D_{uv}} u^3v^7 dudv$$

既然区域 D_{uv} 是标准的四分之一圆, 我们果断使用极坐标: 令 $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$. 定限为 $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. 微元 $dudv = r dr d\theta$.

$$\begin{aligned} I &= 16ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (r \cos \theta)^3 (r \sin \theta)^7 r dr \\ &= 16ab^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \sin^7 \theta d\theta \right) \left(\int_0^1 r^{11} dr \right) \end{aligned}$$

第四步: 分离变量, 分别积分

关于 r 的积分极其简单:

$$\int_0^1 r^{11} dr = \frac{1}{12}$$

关于 θ 的三角积分, 将 $\cos^3 \theta$ 拆出一个 $\cos \theta$ 凑微分:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin^7 \theta (\cos \theta d\theta) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) \sin^7 \theta d(\sin \theta) \\ &= \left[\frac{1}{8} \sin^8 \theta - \frac{1}{10} \sin^{10} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{1}{40} \end{aligned}$$

将两部分结果乘起来:

$$I = 16ab^2 \cdot \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{12} = \frac{16ab^2}{480} = \frac{ab^2}{30}$$

□

注记 1.4: 方法取舍

这个方法这里计算略复杂了。

注记 1.5: 教学小结

从“常规做法”到“三角形区域”，再到这种“圆形区域”，一道题三种解法，完美地向我们展示了重积分的核心思想——**被积函数与积分区域的相互妥协**。只要代换找得准，哪怕是再扭曲的边界，也能被我们“盘”成最舒服的形状！

1.3 极坐标与参数方程

例题 1.6: 极坐标与直角坐标的转换 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$ 等于 ()。

- A. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx$
 B. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$
 C. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$
 D. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy$

解答. 正确答案选 D。

本题考察**极坐标系与直角坐标系的区域转换**。由给定的二次积分可知，积分区域为： $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq \cos \theta$ 。将极坐标边界 $r = \cos \theta$ 两边同乘 r ，得到 $r^2 = r \cos \theta$ ，转换为直角坐标方程即为：

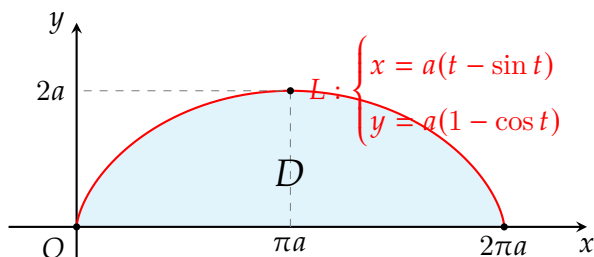
$$x^2 + y^2 = x \implies \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

这表明区域 D 是一个圆心在 $(1/2, 0)$ 、半径为 $1/2$ 的圆。又因为 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，说明区域位于第一象限（上半圆）。所以直角坐标系下的区域为： $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x-x^2}\}$ 。

对照选项，将其写为先对 y 积分、后对 x 积分的累次积分形式，显然 D 选项的定限完全吻合。 □

例题 1.7: 参数方程定限 计算 $\iint_D y dx dy$ ，其中 D 是由 $L: \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴围成的区域。

解析 1.9: 图示与解析



这里我课上讲错了，摆线图像是左右对称的。

通过画图，得知积分区域为 X 型区域，先计算内部积分，然后算外层积分时都转化到以参数 t 为变元，这是参数方程的特性决定的，因为你没法写出 y 关于 x 的函数，只能借助参变量。

解答. 积分区域 D 的顶端是摆线 $y = y(x)$ ，底部是 x 轴。对于给定的 x ，上限是摆线的纵坐标 y ，下限是 0。我们先将其写为关于 x, y 的二次积分：

$$I = \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y(x)} y dy = \int_0^{2\pi a} \frac{1}{2} y^2(x) dx$$

利用参数方程换元，将对 x 的积分全部转化为对参数 t 的积分。已知 $x = a(t - \sin t)$ ，则微元 $dx = a(1 - \cos t)dt$ 。当 x 从 0 变到 $2\pi a$ 时，参数 t 对应的从 0 变到 2π 。

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a(1 - \cos t)]^2 \cdot a(1 - \cos t) dt \\ &= \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt \end{aligned}$$

展开被积函数： $(1 - \cos t)^3 = 1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t$ 。根据三角函数在周期 $[0, 2\pi]$ 上的积分性质，奇数次方的余弦项积分全为 0：

$$\int_0^{2\pi} \cos t dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt = 0$$

剩下两项的积分为：

$$\int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi, \quad 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 3 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 3\pi$$

所以： $I = \frac{a^3}{2}(2\pi + 3\pi) = \frac{5\pi a^3}{2}$ 。

□

2 三重积分

例题 2.1: 三重积分的三种坐标系穿线法 已知 Ω 是由 $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ 以及 $z = x^2 + y^2$ 所围成的立体。如果将 $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ 分别化成直角坐标以及柱面坐标的三次积分时，它们分别为：

$I =$ _____

以及 $I =$ _____。

解析 2.1: 解析

本题是一道非常纯粹的“穿线定限”基本功训练题。积分区域 Ω 下方是 xy 平面 ($z = 0$)，上方是旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ ，外围是圆柱面 $x^2 + y^2 = 4$ 。

解答. 1. 化为直角坐标系 (先 z 后 x, y): 区域 Ω 在 xy 平面上的投影 D_{xy} 是圆 $x^2 + y^2 \leq 4$ 。在这个圆内穿线，对 D_{xy} 采用 X-型区域定限： $-2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$ 。对于任

意投影点 (x, y) , 竖直穿过立体的射线从 $z = 0$ 穿入, 从 $z = x^2 + y^2$ 穿出。所以直角坐标下的三次积分为:

$$I = \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz$$

2. 化为柱面坐标系: 在柱面坐标下, $x^2 + y^2 = r^2$ 。投影区域 D_{xy} 变为: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 2$ 。 z 的上下限直接替换为 r 的表达式: $0 \leq z \leq r^2$ 。注意体积微元要乘上雅可比因子 r , 即 $dv = r dr d\theta dz$ 。所以柱坐标下的三次积分为:

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_0^{r^2} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz$$

□

例题 2.2: 柱面坐标系计算三重积分 计算 $I = \iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是由 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 所围成的立体。

解析 2.2: 解析

看到 $x^2 + y^2$ 以及旋转体特征, 果断选用柱坐标系。

解答. 首先求曲面交线以确定投影区域。联立抛物面 $z = r^2$ 与球面 $z = \sqrt{2 - r^2}$:

$$r^2 = \sqrt{2 - r^2} \implies r^4 + r^2 - 2 = 0 \implies (r^2 - 1)(r^2 + 2) = 0$$

因为 $r \geq 0$, 解得 $r = 1$ 。即投影区域 D_{xy} 为 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$ 。穿线定限: 下方曲面为抛物面 $z = r^2$, 上方曲面为球面 $z = \sqrt{2 - r^2}$ 。

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} z r^2 \cdot r dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z dz \\ &= 2\pi \int_0^1 r^3 \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} dr \\ &= \pi \int_0^1 r^3 ((2 - r^2) - r^4) dr = \pi \int_0^1 (2r^3 - r^5 - r^7) dr \\ &= \pi \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) = \pi \left(\frac{12 - 4 - 3}{24} \right) = \frac{5\pi}{24} \end{aligned}$$

□

例题 2.3: 求空间区域体积 求球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 和圆柱体 $x^2 + y^2 \leq ax (a > 0)$ 的公共部分所成空间区域的体积 V 。

解析 2.3: 解析

这是经典的求圆柱与球体公共部分体积的问题。

解答. 根据对称性, 立体关于 xy, yz, zx 三个坐标平面均不对称, 但关于 $z = 0$ 面和 $y = 0$ 面是对称的。我们可以只算第一卦限 ($x, y, z \geq 0$) 的体积, 然后乘 4。在第一卦限, 圆柱的投影区域 D 为: 圆 $r = a \cos \theta$ 在第一象限的部分 ($0 \leq \theta \leq \pi/2$)。上方曲面为球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2}$ 。

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_D \sqrt{a^2 - r^2} \cdot r \, dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \cos \theta} r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr \end{aligned}$$

计算内层积分 (凑微分 $d(a^2 - r^2) = -2r dr$):

$$\int_0^{a \cos \theta} r(a^2 - r^2)^{1/2} \, dr = -\frac{1}{3} [(a^2 - r^2)^{3/2}]_0^{a \cos \theta} = -\frac{1}{3} (a^3 \sin^3 \theta - a^3) = \frac{a^3}{3} (1 - \sin^3 \theta)$$

代入外层积分:

$$\begin{aligned} V &= \frac{4a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 \theta) \, d\theta \\ &= \frac{4a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta \right) \\ &= \frac{4a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \left[-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi/2} \right) = \frac{4a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{2\pi}{3} a^3 - \frac{8}{9} a^3 \end{aligned}$$

□

例题 2.4: 球坐标系计算三重积分 计算积分 $\iiint_{\Omega} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 dv$, $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

解析 2.4: 解析

这题通过对称性的观察可以大大减轻计算量。

解答. 将被积函数展开:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{ab} + \frac{2yz}{bc} + \frac{2zx}{ca}$$

积分区域 Ω 是圆心在原点的球体, 关于三个坐标平面完全对称。因此所有关于单变量的奇函数 (如 xy, yz, zx) 的积分全为 0。原积分退化为:

$$I = \iiint_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dv$$

进一步利用球体的轮换对称性, 有 $\iiint x^2 dv = \iiint y^2 dv = \iiint z^2 dv$ 。因此:

$$\iiint_{\Omega} x^2 dv = \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$$

利用球坐标系计算右侧积分:

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R \rho^2 \cdot \rho^2 d\rho = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{4\pi R^5}{5}$$

所以 $\iiint x^2 dv = \frac{4\pi R^5}{15}$ 。代回原式提取公因式：

$$I = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \frac{4\pi R^5}{15}$$

□

例题 2.5: 长方体区域的重积分 计算三重积分: $I = \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$ 。
其中 $\Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ 。

解析 2.5: 解析

这道题不太常规，看积分区域，理应用欧氏坐标，但是这样内层积分，得到的过于复杂。

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

如果直接在直角坐标系下积分，第一步就会产生极其复杂的反正切函数 ($\arctan$)，后续几乎无从下手。破题的核心在于打破常规：**面对正方体区域，强行使用柱坐标系！**利用柱坐标多出来的面积微元 r 凑微分，将产生反三角函数的风险扼杀在摇篮里。

解答. 第一步：引入柱坐标系与对称性定限

积分区域为正方体 $\Omega: 0 \leq x, y, z \leq 1$ 。其在 xy 平面的投影为正方形 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 。在柱坐标系下， $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ，体积微元 $dv = r dr d\theta dz$ 。由于投影区域 D 以及被积函数均关于直线 $y = x$ (即 $\theta = \pi/4$) 对称，我们可以只计算 $0 \leq \theta \leq \pi/4$ 的下半个三角形区域，并将结果乘以 2。在该下半三角形内，右侧边界为直线 $x = 1$ ，即 $r \cos \theta = 1 \implies r = \sec \theta$ 。所以原三重积分化为：

$$I = 2 \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 dz \int_0^{\sec \theta} \frac{r}{(1+r^2+z^2)^2} dr$$

第二步：内层积分（通过换元引入有理函数）

对于内层关于 r 的积分，得益于柱坐标微元提供的 r ，我们可以使用**换元法（凑微分）**：令 $u = 1 + z^2 + r^2$ ，则 $du = 2r dr$ 。

$$\int_0^{\sec \theta} \frac{r}{(1+z^2+r^2)^2} dr = \left[-\frac{1}{2(1+z^2+r^2)} \right]_0^{\sec \theta} = \frac{1}{2(1+z^2)} - \frac{1}{2(1+z^2+\sec^2 \theta)}$$

【核心眼光】看到了吗？通过换元引入 r ，完美避开了直角坐标系下会产生的 $\arctan$ ，极大地简化了后续计算，这正是本题破局的阵眼！

将内层结果代入，得到：

$$I = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{1+z^2+\sec^2 \theta} \right) dz \triangleq I_1 - I_2$$

对于第一部分 I_1 ，变量完全分离，可直接写出答案：

$$I_1 = \left(\int_0^{\pi/4} 1 d\theta \right) \left(\int_0^1 \frac{1}{1+z^2} dz \right) = \frac{\pi}{4} \cdot [\arctan z]_0^1 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16}$$

第三步：利用对称性

对于第二部分，被积函数中含有 $\sec^2 \theta$ ，这强烈暗示我们对 z 进行正切换元！

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{1 + \sec^2 \theta + z^2} dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{2 + \tan^2 \theta + z^2} dz$$

令 $z = \tan t$ ，则 $dz = \sec^2 t dt$ 。当 $z = 0$ 时 $t = 0$ ，当 $z = 1$ 时 $t = \pi/4$ 。代入得到：

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 t}{2 + \tan^2 \theta + \tan^2 t} dt d\theta$$

【见证奇迹的时刻】观察这个二重积分，它的积分区域 $[0, \pi/4] \times [0, \pi/4]$ 和分母 $2 + \tan^2 \theta + \tan^2 t$ 关于变量 θ 和 t 是**完全对称**的！因此，如果我们交换积分变量 θ 和 t ，积分值保持不变：

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{2 + \tan^2 \theta + \tan^2 t} dt d\theta$$

将两式相加：

$$\begin{aligned} 2I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 t + \sec^2 \theta}{2 + \tan^2 \theta + \tan^2 t} dt d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan^2 t) + (1 + \tan^2 \theta)}{2 + \tan^2 \theta + \tan^2 t} dt d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dt d\theta = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16} \end{aligned}$$

所以 $I_2 = \frac{\pi^2}{32}$ 。

结论：

$$I = I_1 - I_2 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi^2}{32}$$

□

注记 2.1: 补充

这道题第三步想法过于巧妙。

3 物理应用

例题 3.1: 重积分物理应用：求质心 在均匀半圆形薄板下接一个宽与直径相同的长方形的均匀薄板，要求质心在圆心处，求圆半径与长方形的高之比。

解析 3.1: 解析

本题考察**质心计算公式**与力矩平衡的物理思想。

解答. 设圆半径为 R ，长方形高为 h 。建立平面直角坐标系，将半圆心置于原点 $(0, 0)$ 。整个区域 D 由上半平面的半圆 D_1 和下半平面的长方形 D_2 组成。由于图形关于 y 轴对称，整个物体的质心横坐标 $\bar{x} = 0$ 。题目要求整体质心在圆心，即 $\bar{y} = 0$ 。根据组合图形质心公式（或静力矩公式）：

$$S_1 \bar{y}_1 + S_2 \bar{y}_2 = 0$$

- **半圆部分 D_1** : 面积 $S_1 = \frac{1}{2}\pi R^2$ 。静力矩 $M_{x1} = \iint_{D_1} y \, dx dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^R r \sin \theta \cdot r dr = [-\cos \theta]_0^\pi \cdot \frac{1}{3}R^3 = \frac{2}{3}R^3$ 。其质心 $\bar{y}_1 = \frac{M_{x1}}{S_1} = \frac{4R}{3\pi}$ 。
- **长方形部分 D_2** : 宽度为直径 $2R$, 高为 h 。由于它在 y 轴下方, 面积 $S_2 = 2Rh$, 由对称性知其质心在几何中心, 即 $\bar{y}_2 = -\frac{h}{2}$ 。

代入力矩平衡方程:

$$\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right)\left(\frac{4R}{3\pi}\right) + (2Rh)\left(-\frac{h}{2}\right) = 0 \implies \frac{2}{3}R^3 - Rh^2 = 0$$

消去 R ($R \neq 0$), 得到 $h^2 = \frac{2}{3}R^2$ 。因此, 圆半径与长方形高之比为:

$$\frac{R}{h} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

□

例题 3.2: 重积分物理应用: 求引力 求半径为 R , 半顶角为 α , 密度为 ρ_0 的均匀球锥体对顶点处单位质点的引力。

解析 3.2: 解析

这是三重积分最经典的物理应用题之一——求引力, 注意利用对称性, 直接得到这个合力的方向, 在积分时对每个微元的力直接投影到这个方向上。

解答. 为了方便定限, 以顶点为坐标原点, 建立球坐标系, 使球锥体的对称轴落在 z 轴正半轴上。积分区域 Ω 的极坐标表示为: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$, $0 \leq r \leq R$ 。由于体密度 ρ_0 是均匀的, 根据对称性, 除了 z 轴方向的引力外, 另外两个方向的引力分量相互抵消 (即 $F_x = 0, F_y = 0$)。

在球内任取微元 dv , 其质量为 $dm = \rho_0 dv$ 。它对原点处单位质量的质点产生的引力大小为 $dF = G \frac{dm}{r^2}$ 。该力在 z 轴上的投影 (分量) 为 $dF_z = G \frac{\rho_0 dv}{r^2} \cos \varphi$ 。运用球坐标进行三重积分计算总引力 F_z :

$$\begin{aligned} F_z &= \iiint_{\Omega} G \rho_0 \frac{\cos \varphi}{r^2} (r^2 \sin \varphi \, dr d\varphi d\theta) \\ &= G \rho_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^R dr \\ &= G \rho_0 (2\pi) \left(\frac{1}{2} \sin^2 \alpha\right) (R) \\ &= \pi G \rho_0 R \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

结论: 该球锥体对顶点处单位质点的引力大小为 $\pi G \rho_0 R \sin^2 \alpha$, 方向沿对称轴指向物体内部。 □