

曲线曲面积分讲义

秦加俊

2026 年 6 月 20 日

1 微积分基本定理的高维形式

微积分基本定理的核心，是将**边界上的低维积分**（全量/取值差（0 维）、环流/做功（1 维）或通量（2 维）），转化为**内部的高维积分**（某种导数或算子的累积）。将低维写在左侧，更能深刻体现算子在空间内部的作用机制。

我们首先来看一维线段与二维平面区域上的情形：

知识 1.1: 微积分基本定理的高维统一（上）：一维与二维

空间	核心公式（低维边界积分 = 高维内部积分）	算子与意义
一维	【0 维边界 → 1 维内部】 牛顿-莱布尼茨公式 $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$	一阶导数： $f'(x)$ 边界端点值之差，等于内部导数的累积。
二维	【0 维边界 → 1 维内部】 线积分基本定理 $f(B) - f(A) = \int_L \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int_L \nabla f \cdot d\mathbf{r}$	二维梯度： ∇f 起止势能差，等于内部梯度的路径累积。
	【1 维边界 → 2 维内部】 格林公式 $\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dx dy$	二维旋度： $\text{curl } \mathbf{F}$ 边界宏观环流量，等于内部微观旋涡之和。

当我们将空间的维度提升到三维时，内部的积分区域变成了空间曲线、空间曲面与空间体，行列式形式不仅方便记忆，更揭示了算子的代数结构：

知识 1.2: 微积分基本定理的高维统一 (下): 三维空间

空间	核心公式 (低维边界积分 = 高维内部积分)	算子与意义
三维	【0 维边界 → 1 维内部】线积分基本定理 $f(B) - f(A) = \int_L \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \int_L \nabla f \cdot d\mathbf{r}$	三维梯度: ∇f 空间起止势能差, 等于内部梯度的路径累积。
	【1 维边界 → 2 维内部】斯托克斯公式 向量: $\oint_{\partial \Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ 坐标: $\oint_{\partial \Sigma} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$	旋度: $\nabla \times \mathbf{F}$ 边界宏观环流量, 等于空间曲面上旋度的总通量。
	【2 维边界 → 3 维内部】高斯公式 向量: $\oiint_{\partial \Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV$ 坐标: $\begin{aligned} &\oiint_{\partial \Omega} P dydz + Q dzdx + R dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \end{aligned}$	散度: $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 穿出封闭边界的通量, 等于内部源/汇的散度总和。

所有的微积分基本定理都可以用一个极其优美、极度简洁的公式来概括——**广义斯托克斯公式**:

$$\int_{\partial \Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

我们并不要求多理解这个式子, 但要知道在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 对于积分维数之间的转换 (0 维到 1 维, 1 维到 2 维, 2 维到 3 维), 抽象的外微分算子 d 的具像化是什么, d 化身为了我们熟悉

的梯度、旋度和散度。

我们将这三个核心公式的等号“对齐”，大家可以直观地看到，算子是如何将“边界积分”和“内部积分”无缝连接起来的：

知识 1.3: 外微分 d 与其在三维空间中的具像化

三维空间算子	$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$
梯度 (∇f)	$f(B) - f(A) = \int_L \nabla f \cdot d\mathbf{r}$ (线积分基本定理)
旋度 ($\nabla \times \mathbf{F}$)	$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ (斯托克斯公式)
散度 ($\nabla \cdot \mathbf{F}$)	$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV$ (高斯公式)

为了行文的连贯性，二维情形的对应我们统一在最后的例题中说明。

1.1 外微分的两大重要性质

为什么我们要费尽心思引入这个抽象的外微分算子 d ，除了可以帮我们写出一个统一的微积分基本定理的表达式以外，还有就是外微分算子有两个重要性质，通过记忆这两个重要性质，我们可以得到对于梯度，旋度，散度这些具体算子性质的统一理解。

知识 1.4: 外微分 d 的两大性质

一、 $d^2 = 0$

外微分算子有一个最根本的代数性质： $d^2 = d \circ d = 0$ （连续求两次外微分必然为零）。其深刻的几何背景是“边界的边界为空”（ $\partial \circ \partial = 0$ ），即任何封闭区域的边界本身是没有边缘的。

三维微积分中的三大算子构成了如下的微分序列：

$$\text{标量函数} \xrightarrow{d \text{ (梯度 } \nabla)} \text{向量场} \xrightarrow{d \text{ (旋度 } \nabla \times)} \text{向量场} \xrightarrow{d \text{ (散度 } \nabla \cdot)} \text{标量函数}$$

根据 $d^2 = 0$ ，序列中任意连续走两步的结果必然为零，由此我们瞬间秒杀了两个核心的恒等式：

- 梯度的旋度为零（保守场无旋）： $d(df) = 0 \implies \nabla \times (\nabla f) = 0$
- 旋度的散度为零（旋涡场无源）： $d(d\mathbf{F}) = 0 \implies \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

二、庞加莱引理：性质一反过来成立的条件

既然“梯度场的旋度必为零”，那么“无旋场就一定是某个函数的梯度场吗”？**庞加莱引理**给出了回答，但必须加上一个极其关键的**条件**：

在**单连通区域**（区域没有“洞”）内：

- **无旋必保守**：如果 $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ，则必然存在标量函数 f ，使得 $\mathbf{F} = \nabla f$ 。这正是我们求解全微分、判断积分与路径无关的理论基础。
- 如果 $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ ，则必然存在向量场 $\mathbf{A}$ ，使得 $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$ 。

注记 1.1: 庞加莱引理的适用条件

如果区域存在“洞”或者奇点，庞加莱引理就会**失效**！这就是为什么遇到奇点时，即使偏导数相等，我们也不能直接说它与路径无关，必须通过“挖洞法”去单独处理。

以上是一般的理论，实际我们可以对一些具体的情形计算验证一下 $d^2 = 0$ 。

例题 1.1: 算子恒等式的验证 设标量函数 $f(x, y, z)$ 和向量场 $\mathbf{F}(x, y, z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ 均具有连续的二阶偏导数。请用坐标展开的形式验证，由外微分性质 $d^2 = 0$ 导出的两个核心恒等式：

(1) **梯度的旋度恒为零向量**： $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$

(2) **旋度的散度恒为零**： $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

解答 这两个恒等式的微积分本质，其实正是我们非常熟悉的“二阶混合偏导数相等”。

(1) **验证 $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$**

首先写出梯度向量场： $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ 。对该场求旋度，列出行列式并展开：

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla f) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

由于 f 的二阶混合偏导数连续，括号内的三项全为 0，结果为 $\mathbf{0}$ 。

(2) **验证 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$**

首先写出 $\mathbf{F}$ 的旋度向量：

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

对这个新的向量场求散度（即分别对 x, y, z 求导并相加），为了看的更清楚，我们将求导后的各

项按字母 P, Q, R 重新分组配对:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} \right)\end{aligned}$$

同样, 因为混合偏导数相等, 每一对括号内的项都“精准”地相互抵消, 最终结果为 0。

□

注记 1.2: 教学小结

所谓 $d^2 = 0$, 在经典微积分的坐标系计算中, 无非就是由于算子的反对称性 (如叉乘、外积) 与偏导数的对称性发生了完美的碰撞!

1.2 外微分在二维平面上的具象化

现在我们来到二维平面 $\mathbb{R}^2$ 。在平面上, 让我们来看看那三个极其抽象的高维结论 (微积分基本定理, $d^2 = 0$, 庞加莱引理), (三个关于外微分 d 的一般结论的证明当然是不做要求的, 但需要知道具体的对应) 是如何变成我们最熟悉的高数 B 考点的。

例题 1.2: 二维具象化 问题: 在二维平面上, 写出外微分的具体对应算子和 $d^2 = 0$ 对应的结论, 直接计算验证这个结论。

解答. 二维微积分中的算子构成了如下的微分序列 (由于二维情形序列比三维短了一步):

$$\begin{array}{ccc} \text{标量函数 } f(x, y) & \xrightarrow{d \left(\text{二维梯度 } \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \right)} & \text{平面向量场 } \mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} \\ & \xrightarrow{d \left(\text{二维旋度 } \text{curl } \mathbf{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)} & \text{标量函数} \end{array}$$

根据 $d^2 = 0$, 在这个序列中连续走两步的结果必然为零。由于序列变短, 我们只能走出一“连续两步”, 由此写出了二维空间中最核心的恒等式:

◦ 二维梯度的旋度为零 (保守场无旋):

$$d(df) = 0 \implies \text{curl}(\nabla f) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \equiv 0$$

结论: $d^2 = 0$ 在二维标量场上的具象化, 就是微积分中二阶混合偏导数对称性! 同时也证明了“梯度场必定是无旋场”。

□

例题 1.3: 二维具象化: 庞加莱引理 $\implies$ 积分与路径无关 问题: 庞加莱引理在二维情形下, 是什么?

解答. 二维庞加莱引理完全等价于我们熟知的内容:

“在平面无洞区域内，若 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ ，则 $P dx + Q dy$ 必为全微分。”

它为我们做题时“判断积分与路径无关”以及“凑全微分求势能”提供了最坚实的数学保障！□

例题 1.4: 二维庞加莱引理实战演练

验证平面向量场 $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + e^x)\mathbf{i} + (x^2 + \cos y)\mathbf{j}$ 是保守场，并求出其所有的势函数 $u(x, y)$ 。

解答. 第一步：验证条件（触发庞加莱引理） 首先，该向量场的定义域为整个二维平面 $\mathbb{R}^2$ ，显然是没有“洞”的单连通区域。其次，记 $P(x, y) = 2xy + e^x$ ， $Q(x, y) = x^2 + \cos y$ 。计算它们的交叉偏导数：

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

因为 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ ，所以该向量场是无旋场。满足这两个条件后，根据**庞加莱引理**，该向量场必为保守场，即必然存在势函数 $u(x, y)$ 。这为我们接下来的求解提供了理论保底。

第二步：求解势函数（凑全微分法） 既然确信势函数存在，我们就可以将向量场写成微分形式，并通过“凑微分”的方法将其彻底还原：

$$\begin{aligned} du &= P dx + Q dy \\ &= (2xy + e^x) dx + (x^2 + \cos y) dy \end{aligned}$$

我们将各项重新组合，把含有相同变量交织的项强行“绑定”在一起：

$$\begin{aligned} du &= (2xy dx + x^2 dy) + e^x dx + \cos y dy \\ &= d(x^2 y) + d(e^x) + d(\sin y) \\ &= d(x^2 y + e^x + \sin y) \end{aligned}$$

由于整体是一个全微分，我们直接脱去外层的微分符号 d ，得到最终的势函数：

$$u(x, y) = x^2 y + e^x + \sin y + C$$

(其中 C 为任意常数，代表任意一点的基准势能)。□

2 整体带入与自由选取路径

在处理曲线积分时，切忌一上来就死算参数方程。我们应该优先观察被积函数的结构与积分路径的几何特征，灵活运用整体代入、格林公式、路径变形以及全微分配凑等技巧。

2.1 整体带入法

曲线曲面上的点自然满足一些约束关系，将这个关系直接带入到被积函数，将大大简化微积分基本定理的计算。

例题 2.1: 整体代入法与区域对称性 求曲线积分 $\oint_C e^{-(x^2+y^2)} [\cos(2xy) dx + \sin(2xy) dy]$ 的值, 其中 C 是单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$, 方向为逆时针。

解答. 第一步: 观察路径特征, 整体代入。 由于积分路径 C 的方程恰好为 $x^2 + y^2 = 1$, 因此在曲线 C 上的任意一点, 被积函数中的 $e^{-(x^2+y^2)}$ 都是一个常数 e^{-1} 。我们可以将其直接作为一个整体常数提取到积分号外面:

$$I = \frac{1}{e} \oint_C \cos(2xy) dx + \sin(2xy) dy$$

第二步: 运用格林公式。 此时, 设 $P = \cos(2xy)$, $Q = \sin(2xy)$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \cos(2xy), \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -2x \sin(2xy)$$

根据格林公式:

$$I = \frac{1}{e} \iint_D (2y \cos(2xy) - (-2x \sin(2xy))) dx dy = \frac{2}{e} \iint_D (y \cos(2xy) + x \sin(2xy)) dx dy$$

第三步: 利用对称性化简重积分。 观察被积函数 $f(x, y) = y \cos(2xy) + x \sin(2xy)$ 。

这里有很多对称性, 可以考虑关于原点的对称性, 将 (x, y) 替换为 $(-x, -y)$, 我们有:

$$f(-x, -y) = (-y) \cos(2xy) + (-x) \sin(2xy) = -f(x, y)$$

可见被积函数是关于原点的奇函数。

而积分区域 D (单位圆盘) 关于原点完全对称, 因此该二重积分的值为 0。故原曲线积分 $I = 0$ 。

也可以单独看关于 x 的对称性, y 的对称性, 就是寻找奇函数。

□

例题 2.2: 整体代入 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长为 a , 求 $\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds$ 。

解析 2.1: 对称性与整体代入

这是一道极其巧妙的第一类曲线积分题。它完美地考察了两个核心考点: **利用对称性消去奇函数项**与 **利用曲线方程进行整体代入**。如果试图硬算参数方程, 将会因为椭圆周长无法用初等函数表示而陷入死胡同。

解答. 第一步: 利用对称性消去奇函数项

积分路径 $L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 是一个中心在原点的标准椭圆, 它关于 x 轴、 y 轴均完美对称。观察被积函数中的交叉项 $f(x, y) = 2xy$: 它关于 x 是奇函数 ($f(-x, y) = -f(x, y)$), 且关于 y 也是奇函数。根据第一类曲线积分的对称性性质, 奇函数在关于对应坐标轴对称的曲线上积分为 0, 即:

$$\oint_L 2xy ds = 0$$

原积分瞬间化简为：

$$I = \oint_L (3x^2 + 4y^2) ds$$

第二步：利用曲线方程整体代入

对于剩下的被积函数 $3x^2 + 4y^2$ ，我们观察它与积分路径 L 的关系。将椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的两边同时乘以 12，进行通分：

$$3x^2 + 4y^2 = 12$$

注记 2.1: 整体代入

在计算第一类曲线/曲面积分时，被积函数中的点 (x, y) 始终位于给定的曲线/曲面上。因此，曲线方程本身就是天然的约束条件，可以直接代入被积函数中进行化简！

由于在曲线 L 上， $3x^2 + 4y^2$ 恒等于常数 12，我们将其整体代入积分式中：

$$I = \oint_L 12 ds = 12 \oint_L ds$$

第三步：利用几何意义得出结论

根据第一类曲线积分的几何意义， $\oint_L 1 ds$ 表示闭合曲线 L 的总弧长（即周长）。题目已知该椭圆的周长为 a ，所以：

$$\oint_L ds = a$$

最终结果为：

$$I = 12a$$

□

2.2 经典情形：函数在一点奇异

函数在区域内部不能满足格林公式的使用条件，这种情况绝大多数都是函数出现分母为 0 的情形。

注记 2.2: 奇点位置

要注意分母零点和区域的关系。

例题 2.3: 含奇点曲线积分的路径变形（挖洞法） 计算 $I_1 = \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ 和 $I_2 = \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + 4y^2}$ ，其中 L 分别为：

- (1) 椭圆 $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ 所围区域的正向边界；
- (2) 单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 所围区域的正向边界。

解答. 无论对于 I_1 还是 I_2 ，分子都是典型的 $x dy - y dx$ 。我们先检查被积函数是否满足格林公式的条件（即 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ ）。以 I_2 为例，设 $P = \frac{-y}{x^2 + 4y^2}$ ， $Q = \frac{x}{x^2 + 4y^2}$ ：

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1 \cdot (x^2 + 4y^2) - x(2x)}{(x^2 + 4y^2)^2} = \frac{4y^2 - x^2}{(x^2 + 4y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1 \cdot (x^2 + 4y^2) - (-y)(8y)}{(x^2 + 4y^2)^2} = \frac{4y^2 - x^2}{(x^2 + 4y^2)^2}$$

二者相等！同理对 I_1 也有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 。

注记 2.3: 格林公式的条件

但是注意：它们在原点 $(0,0)$ 处分母为零，也就是存在奇点。能否用格林公式，取决于曲线内部是否包围了奇点。

(1): 曲线不包围奇点

椭圆 $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的中心在 $(2,0)$ ，其最左端的点为 $(2 - \sqrt{2}, 0)$ ，显然大于 0。因此原点 $(0,0)$ 在椭圆的外部。曲线 L 内部处处光滑，直接由格林公式得出：

$$I_1 = 0, \quad I_2 = 0.$$

(2): 曲线包围奇点，自由变形路径，为了整体带人

单位圆 $L: x^2 + y^2 = 1$ 的内部包含了奇点 $(0,0)$ ，不能直接使用格林公式。

- 计算 I_1 ：因为积分路径恰好是 $x^2 + y^2 = 1$ ，我们可以像例 1 那样直接整体代入分母。

$$I_1 = \oint_L \frac{x dy - y dx}{1} = 2 \iint_D 1 dx dy = 2 \times (\text{单位圆面积}) = 2\pi$$

- 计算 I_2 ：此时分母是 $x^2 + 4y^2$ ，无法直接在 L 上整体代入。但由于 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ ，根据路径无关原理，我们可以在包围奇点的区域内自由改变积分路径，只要不穿过奇点即可。我们故意构造一个新的内侧正向椭圆 $l: x^2 + 4y^2 = \varepsilon^2$ 。为了计算方便，不妨直接取 $l: x^2 + 4y^2 = 1$ 。沿此新路径积分，分母整体代入为 1：

$$I_2 = \oint_l \frac{x dy - y dx}{1} = \iint_{D_l} \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx dy = 2 \iint_{D_l} dx dy$$

椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{(1/2)^2} = 1$ 的面积为 $\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$ 。因此 $I_2 = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$ 。

□

2.3 自己选路径

例题 2.4: 曲线积分与路径无关及凑全微分 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数， L 是上半平面 ($y > 0$) 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a, b) ，终点为 (c, d) 。记

$$I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy$$

(1) 证明曲线积分与路径无关；

(2) 当 $ab = cd$ 时，求 I 的值。

证明. (1) **证明与路径无关:** 设 $P = \frac{1}{y} + yf(xy)$, $Q = xf(xy) - \frac{x}{y^2}$ 。我们分别求交叉偏导数:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} + f(xy) + y \cdot x f'(xy) = -\frac{1}{y^2} + f(xy) + xyf'(xy)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = f(xy) + x \cdot y f'(xy) - \frac{1}{y^2} = f(xy) + xyf'(xy) - \frac{1}{y^2}$$

显然 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ 。又因为曲线 L 完全位于上半平面 $y > 0$ 内, 该区域是单连通的 (避开了 $y = 0$ 的奇点)。因此, 该曲线积分在给定的上半平面内与路径无关。□

解答. 【解法一: 特殊路径选取与整体代入】

既然第一问已经证明了积分与路径无关, 我们就可以在区域内**自由选取**一条从 (a, b) 到 (c, d) 的简单路径。

已知条件极其特殊: $ab = cd$ 。这意味着起点和终点恰好都位于同一条双曲线 $xy = ab$ (或记作 $xy = k$) 的同一支上 (因为 $y > 0$)。因此, 我们果断选取双曲线段 $L': xy = ab$ 作为积分路径。

在这条路径上, 我们可以运用**整体代入法**:

○ $xy \equiv ab$, 因此未知函数变成常数: $f(xy) \equiv f(ab)$;

○ $y = \frac{ab}{x}$, 对其求微分得到 $dy = -\frac{ab}{x^2} dx$ 。

将它们整体代入原积分式, 将线积分化为关于 x 的一元定积分:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^c \left\{ \frac{1}{\frac{ab}{x}} \left[1 + \left(\frac{ab}{x} \right)^2 f(ab) \right] + \frac{x}{\left(\frac{ab}{x} \right)^2} \left[\left(\frac{ab}{x} \right)^2 f(ab) - 1 \right] \left(-\frac{ab}{x^2} \right) \right\} dx \\ &= \int_a^c \left\{ \left[\frac{x}{ab} + \frac{ab}{x} f(ab) \right] + \frac{x^3}{(ab)^2} \left[\frac{(ab)^2}{x^2} f(ab) - 1 \right] \left(-\frac{ab}{x^2} \right) \right\} dx \\ &= \int_a^c \left\{ \left[\frac{x}{ab} + \frac{ab}{x} f(ab) \right] - \frac{x}{ab} \left[\frac{(ab)^2}{x^2} f(ab) - 1 \right] \right\} dx \\ &= \int_a^c \left\{ \frac{x}{ab} + \frac{ab}{x} f(ab) - \frac{ab}{x} f(ab) + \frac{x}{ab} \right\} dx \end{aligned}$$

神奇的事情发生了! 含有未知函数 $f(ab)$ 的项完全抵消, 被积函数变得极其简单:

$$I = \int_a^c \frac{2x}{ab} dx = \left[\frac{x^2}{ab} \right]_a^c = \frac{c^2 - a^2}{ab} = \frac{c^2}{ab} - \frac{a^2}{ab}$$

最后, 利用题设条件 $ab = cd$, 对第一项的分母进行替换:

$$I = \frac{c^2}{cd} - \frac{a^2}{ab} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$$

结果与全微分法完全一致。

【解法二：凑全微分，找原函数】既然积分与路径无关，说明被积表达式是一个**全微分**。我们可以通过分组凑微分法求出它的原函数（势函数） $u(x, y)$ 。将原积分式展开并重新组合：

$$\begin{aligned} P dx + Q dy &= \left(\frac{1}{y} + y f(xy) \right) dx + \left(x f(xy) - \frac{x}{y^2} \right) dy \\ &= \left(\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy \right) + f(xy)(y dx + x dy) \\ &= d\left(\frac{x}{y}\right) + f(xy) d(xy) \end{aligned}$$

这表明原函数为 $u(x, y) = \frac{x}{y} + \int_0^{xy} f(t) dt$ 。由于积分与路径无关，其值只取决于终点 (c, d) 和起点 (a, b) ：

$$\begin{aligned} I &= u(c, d) - u(a, b) \\ &= \left(\frac{c}{d} + \int_0^{cd} f(t) dt \right) - \left(\frac{a}{b} + \int_0^{ab} f(t) dt \right) \end{aligned}$$

由于题目已知 $ab = cd$ ，因此 $\int_0^{cd} f(t) dt = \int_0^{ab} f(t) dt$ ，两项相互抵消。最终结果为：

$$I = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd}$$

□

2.4 附录

知识 2.1: 几何体的维度判定：方程约束与自由度

在多元微积分中，几何形体（曲线或曲面）往往通过方程来定义。判断一个几何形体究竟是几维的，核心在于理解“自由度”的概念：

对象的维度（自由度）= 所在空间的维度 - 独立约束方程的个数

每一次增加一个方程约束，就相当于“降了一维”。具体对应关系如下：

所在空间	约束方程	几何形体	维度计算（自由度）	典型示例
二维平面	1 个 $F(x, y) = 0$	平面曲线 (Curve)	$2 - 1 = 1$ (一维对象)	$x^2 + y^2 = 1$ (平面上的单位圆)
三维空间	1 个 $F(x, y, z) = 0$	空间曲面 (Surface)	$3 - 1 = 2$ (二维对象)	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (三维空间中的球面)
三维空间	2 个 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$	空间曲线 (Curve)	$3 - 2 = 1$ (一维对象)	$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ (球面与平面的交线：圆)

注记 2.4: 参数化与空间曲线

- 参数化的本质：几维的对象，就需要几个参数来描述。例如空间曲面是二维的，参数化时就需要 u, v 两个参数（如球坐标的 θ, φ ）；空间曲线是一维的，只需要 t 一个参数。
- 空间曲线的来源：在三维空间中，单看一个方程 $F = 0$ 永远是曲面。空间曲线本质上是两个空间曲面的交线（即同时满足两个方程）。

3 曲线曲面积分常规计算**知识 3.1: 曲线积分参数化**

设曲线 L 的参数方程为 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$:

- 第一类曲线积分（对弧长）

微元替换： $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

- 第二类曲线积分（对坐标）

微元替换：直接求导 $dx = x'(t)dt, dy = y'(t)dt, dz = z'(t)dt$

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_{t_{\text{起点}}}^{t_{\text{终点}}} [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)] dt$$

知识 3.2: 曲面积分

- 第一类曲面积分（对面积）——情形 1：显式方程

设曲面 Σ 为 $z = z(x, y)$, 投影区域为 D_{xy} :

微元替换： $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$$

- 第一类曲面积分（对面积）——情形 2：一般参数方程

设曲面 Σ 的参数方程为 $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in D_{uv}$:

微元替换：利用曲面的第一基本形式，面积微元 $dS = \sqrt{EG - F^2} dudv$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv$$

注：这里的 E, F, G 为曲面的第一基本量，由切向量的点乘给出：

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2$$

$$F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$\sqrt{EG - F^2}$ 就是法向量的模长 $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$,

○ 第二类曲面积分 (对坐标)

微元替换: 将 $z = z(x, y)$ 强制代入, 微元直接化为投影面微元 $dxdy$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dxdy$$

注意正负号: 若曲面 Σ 取“上侧”(法向量与 z 轴夹角为锐角), 取正号; 取“下侧”则取负号。

知识 3.3: 曲线与曲面积分的一般计算步骤

曲线和曲面积分的核心思想是: “**参数化**”, 将它们转化为我们熟悉的定积分或二重积分。拿到题目, 请遵循“先整体判断, 后局部计算”的原则:

Step 1. 判断是否“闭合”? (能否用微积分基本定理)

做题前先观察积分路径/曲面是否封闭。

- 如果**封闭**: 立刻检查是否能用 **格林公式** (2D 曲线)、**高斯公式** (3D 曲面) 或 **斯托克斯公式** (3D 曲线)。这是最快解法!
- 如果**不封闭**: 思考能否“补线/补面”凑成封闭区域, 用完公式后再减去补上去那部分的积分。

Step 2. 判断是否“与路径无关”? (全微分方程)

对于第二类曲线积分 $\int Pdx + Qdy$, 若 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 说明积分与路径无关。

可以直接凑全微分, 找原函数, 或者自己选取最佳的积分路径 (方便整体带入) 进行计算。

Step 3. 老老实实“一投、二代、三计算”

如果不能用公式, 就直接参数化:

- **参数化/投影 (投)**: 将曲线写成参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, 或将曲面 Σ 投影到某个坐标面上得到区域 D_{xy} , 并写出曲面方程 $z = z(x, y)$ 。
- **代换化简 (代)**: 把参数方程或曲面方程代入被积函数。对于第一类积分, 换算弧长/面积微元 (如 $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$); 对于第二类积分, 直接求导代入 (如 $dz = z_x dx + z_y dy$)。
- **定限与正负号 (算)**: 对于带方向的积分 (第二类), 注意参数 t 必须是从起

点到终点；曲面积分必须根据法向量的指向（如“上侧”取正）来决定正负号。