

期中考试专题

秦加俊

2026 年 6 月 20 日

北大高数 B (2023-2025) 期中真题考点分布评述

【命题趋势与备考指南】纵观北京大学近三年的高数 B 期中试卷，考点分布极其稳定，但考查的“深度”与“切入角度”却每年都在翻新。整体试卷结构可以清晰地划分为四大板块：

1. 常微分方程 (占比约 30% - 40%)：反套路与底层逻辑

北大的微积分绝不仅考“算功”。在常规的初等积分法，高阶常系数线性方程之外，命题人极度偏爱考查那些容易被学生忽略的“理论死角”。

- 2024 年直接考查了平时极少要求具体计算的皮卡迭代，直击存在唯一性定理的底层逻辑。
- 2025 年考查了非齐次项为 $\frac{1}{2+e^x}$ 的方程，完美避开了“待定系数法”，强迫学生必须使用常数变易法。
- 2023 年则考查了变系数的欧拉方程的初值问题。这说明备考决不能只背常规题型的公式。

2. 重积分 (占比约 20%)：对称性是唯一的救赎

必考题。核心考点永远是对称性（奇偶性、轮换对称性）与坐标变换（极坐标、柱/球坐标）。北大考卷中的重积分几乎没有一道是纯靠蛮力硬算的。例如 2025 年的第一题和 2023 年的第六题，如果看不出被积函数中奇函数的对称抵消，计算量将是灾难性的。

3. 曲线与曲面积分 (占比约 30% - 40%)：三大公式的主场

这是整张试卷的重头戏，也是拉开差距的关键。

- 第一型积分考查硬基本功：参数化提取、弧长微元 ds 和面积微元 dS 的准确计算。
- 第二型积分绝对是格林公式、高斯公式、斯托克斯公式的阅兵场。高斯公式更是每年必考（如 2024 的 Q7，2025 的 Q5）。
- 路径无关性是另一个高频重点，2025 年的压轴题直接考查了“环路积分为零”推导“旋度为零”的严格证明。

4. 综合极限与分析学思维 (占比约 10%)：拔高压轴

例如 2024 年的反常积分极限（考查积分中值定理与洛必达法则的结合）、2023 年的含参曲线积分取极限。这类题目要求学生在多重积分的环境下，依然能熟练运用一元微积分的极限理论。

1 模块一：常微分方程（三年 8 题）

1.1 特殊知识点

例题 1.1: 一阶非线性方程的皮卡迭代（2024 年期中） 求出一阶常微分方程初值问题 $y' = x + y^2, y(0) = 0$ 的皮卡序列的前两项 y_1, y_2 。

解答. 第一步：构造等价的积分方程

将微分方程初值问题转化为积分方程形式：

$$y(x) = y(0) + \int_0^x (t + y^2(t)) dt = \int_0^x (t + y^2(t)) dt$$

第二步：执行皮卡迭代

取零次近似为常数函数： $y_0(x) \equiv y(0) = 0$ 。将 $y_0(x)$ 代入积分方程，求第一次近似 $y_1(x)$ ：

$$y_1(x) = \int_0^x (t + 0^2) dt = \int_0^x t dt = \frac{1}{2}x^2$$

将 $y_1(x)$ 代入积分方程，求第二次近似 $y_2(x)$ ：

$$y_2(x) = \int_0^x \left(t + \left(\frac{1}{2}t^2 \right)^2 \right) dt = \int_0^x \left(t + \frac{1}{4}t^4 \right) dt$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5$$

由此得到皮卡序列的前两项为 $y_1(x) = \frac{1}{2}x^2$ 和 $y_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5$ 。 □

例题 1.2: 二阶常系数方程的常数变易法（2025 年期中） 求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{2+e^x}$ 的通解。

解答. 第一步：求解对应的齐次方程

特征方程为 $r^2 + 3r + 2 = 0$ ，解得特征根 $r_1 = -1, r_2 = -2$ 。齐次方程的基础解系为 $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{-2x}$ 。

第二步：应用常数变易法

由于右端非齐次项 $f(x) = \frac{1}{2+e^x}$ 不是标准的多项式或指数形式，待定系数法失效，需使用常数变易法。计算朗斯基行列式：

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-3x} - (-e^{-3x}) = -e^{-3x}$$

建立导数方程组并求解 $C_1'(x)$ 和 $C_2'(x)$ ：

$$C_1'(x) = \frac{-y_2 f(x)}{W(x)} = \frac{-e^{-2x} \cdot \frac{1}{2+e^x}}{-e^{-3x}} = \frac{e^x}{2+e^x}$$

$$C_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{W(x)} = \frac{e^{-x} \cdot \frac{1}{2+e^x}}{-e^{-3x}} = \frac{-e^{2x}}{2+e^x}$$

第三步：积分求解待定函数

对 $C_1'(x)$ 积分：

$$C_1(x) = \int \frac{e^x}{2+e^x} dx = \int \frac{d(2+e^x)}{2+e^x} = \ln(2+e^x)$$

对 $C_2'(x)$ 积分（通过分子加减常数化简）：

$$C_2(x) = \int \frac{-e^{2x}}{2+e^x} dx = \int \frac{-e^x(2+e^x) + 2e^x}{2+e^x} dx = \int \left(-e^x + \frac{2e^x}{2+e^x} \right) dx = -e^x + 2\ln(2+e^x)$$

第四步：组合通解

特解为 $y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ ：

$$y^* = e^{-x} \ln(2+e^x) + e^{-2x} (-e^x + 2\ln(2+e^x)) = -e^{-x} + (e^{-x} + 2e^{-2x}) \ln(2+e^x)$$

将特解与齐次通解组合（特解中的 $-e^{-x}$ 可并入齐次通解的任意常数项中），最终通解为：

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + 2e^{-2x}) \ln(2+e^x)$$

□

例题 1.3：二阶变系数欧拉方程的初值问题（2023 年期中，第 2 题） 求方程 $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ ($x > 0$) 的满足条件 $y(1) = 1, y'(1) = 1$ 的解。

解答. 【核心方法点拨：对数换元化为常系数方程】

这道题是标准的二阶齐次欧拉方程。由于题目已经贴心地给定了 $x > 0$ ，我们直接作指数变量代换：令 $x = e^t$ ，即 $t = \ln x$ 。利用链式法则，将原方程的变系数微分算子进行转换（记 $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ ）：

$$xy' = \dot{y}, \quad x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}$$

代入原方程：

$$(\ddot{y} - \dot{y}) - 3\dot{y} + 4y = 0 \implies \ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0$$

通过这一步，我们将棘手的变系数方程完美降维成了常系数方程！

接下来求解常系数方程。特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ ，解得二重特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 。因此，关于变量 t 的通解为：

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{2t}$$

将 $t = \ln x$ 以及 $e^{2t} = x^2$ 代回，得到原方程关于 x 的通解：

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$$

最后代入初值条件确定常数：

先对通解求一次导数：

$$y'(x) = 2C_1 x + C_2 (2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}) = (2C_1 + C_2)x + 2C_2 x \ln x$$

由 $y(1) = 1$, 代入 $x = 1$ 且 $\ln 1 = 0$:

$$C_1 \cdot 1^2 + C_2 \cdot 0 = 1 \implies C_1 = 1$$

由 $y'(1) = 1$, 代入 $x = 1$:

$$(2C_1 + C_2) \cdot 1 + 0 = 1 \implies 2(1) + C_2 = 1 \implies C_2 = -1$$

综上所述, 满足初值条件的特解为:

$$y(x) = x^2 - x^2 \ln x$$

□

1.2 常规题目

例题 1.4: 可分离变量与变量替换 (2023 年期中, 第 1 题) 求方程 $(xy - x^3y^3)dx + (1 + x^2)dy = 0$ 满足条件 $y(0) = 1$ 的解。

解答. 【核心方法点拨: 伯努利方程的伪装 / 整体代换】

这道题看起来有些凌乱, 但本质上是一阶非线性方程的经典变体。方法一 (化为伯努利方程): 将原方程整理为 y' 的形式: $(1 + x^2)y' + xy = x^3y^3 \implies y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x^3}{1+x^2}y^3$ 。这是一个标准的关于 y 的伯努利方程 (指数 $n = 3$)。解法: 两边同除以 y^3 , 令新变量 $u = y^{-2}$, 则 $u' = -2y^{-3}y'$, 原方程即可转化为关于 u 的标准一阶线性方程, 求出 $u(x)$ 后再开方得 $y(x)$ 。

方法二 (整体代换法): 观察到方程中多次出现 xy , 可考虑令 $u = xy$, 则 $dy = \frac{du - ydx}{x}$ 。代入方程化简后, 可以将其转化为一个关于 u 和 x 的可分离变量方程求解。 □

例题 1.5: 常系数非齐次方程: 特征根单根共振 (2023 年期中, 第 3 题) 求方程 $y'' + y' - 2y = x + e^x + \sin x$ 的满足条件 $y(0) = -\frac{7}{20}, y'(0) = \frac{38}{15}$ 的解。

解答. 【核心方法点拨: 待定系数法与叠加原理的综合考验】

这是一道极具代表性的“体力活”题目。首先求齐次方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的特征根: $r^2 + r - 2 = 0 \implies r_1 = 1, r_2 = -2$ 。接下来, 根据叠加原理, 需要将右端项拆分为三个独立部分, 分别利用待定系数法求特解: 1. 对于 $f_1(x) = x$ (多项式, $\lambda = 0$ 不是特征根): 设特解 $y_1^* = Ax + B$ 。2. 对于 $f_2(x) = e^x$ (指数函数, $\lambda = 1$ 是单特征根): 由于发生共振, 特解必须乘上因子 x , 设 $y_2^* = Cxe^x$ 。3. 对于 $f_3(x) = \sin x$ (三角函数, $\pm i$ 不是特征根): 设特解 $y_3^* = D \cos x + E \sin x$ 。分别代入原方程求出所有系数, 将三个特解相加得到总特解, 再加上齐次通解, 最后代入初始条件确定常数即可。 □

例题 1.6: 高阶常系数线性方程：纯粹特征根求解（2024 年期中，第 6 题） 求出二阶常微分方程 $y'' - 2y' + y = e^x$ 的通解。*（注：原卷中式子似乎有笔误写成了 $y'' - 2y' + y' = e^x$ ，通常这类题意指 $y'' - 2y' + y = e^x$ ，此处按常见形式解读）*

解答. 【核心方法点拨：特征根二重根共振】

这也是一道典型的待定系数法题目。求对应的齐次方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的特征根： $r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$ （二重实根）。齐次通解为 $Y = (C_1 + C_2x)e^x$ 。由于右端项 $f(x) = e^x$ ，其指数 $\lambda = 1$ 恰好是特征方程的二重根，发生了深度共振。因此，设定特解时必须乘上因子 x^2 ，即设 $y^* = Ax^2e^x$ 。将 $y^*, (y^*)', (y^*)''$ 代入原方程，即可解得常数 A ，从而得到通解。 $\square$

例题 1.7: 一阶非齐次线性方程：纯代数变形（2025 年期中，第 6 题） 求解方程 $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x+y}{x}$ 。

解答. 【核心方法点拨：齐次方程代换】

这是一道典型的可化为齐次方程的题目。将方程右侧的对数项化简为 $\ln(1 + \frac{y}{x})$ ，并将方程两边同除以 x ：

$$y' - \frac{y}{x} = \left(1 + \frac{y}{x}\right) \ln \left(1 + \frac{y}{x}\right)$$

令 $u = \frac{y}{x}$ ，则 $y = ux$ ， $y' = u'x + u$ 。代入上式：

$$u'x + u - u = (1 + u) \ln(1 + u) \Rightarrow x \frac{du}{dx} = (1 + u) \ln(1 + u)$$

这转化为一个标准的可分离变量方程：

$$\int \frac{du}{(1+u) \ln(1+u)} = \int \frac{dx}{x}$$

左侧积分可利用凑微分法 $d(\ln(1+u)) = \frac{du}{1+u}$ ，从而解出 $u(x)$ ，最后再将其代回 $y(x) = x \cdot u(x)$ 即可得到通解。 $\square$

1.3 解含积分的方程

例题 1.8: 含定积分项的常微分方程：常数代换法（2024 年期中，第 9 题） 求出所有的可导函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足：

$$f'(x) = xf(x) + x \int_0^1 tf(t)dt$$

解答. 第一步：看破伪装，引入常数代换

观察方程右侧的积分项 $\int_0^1 tf(t)dt$ 。因为它的上下限都是常数，且积分结束后变量 t 会被消去，

所以这个积分的结果必定是一个**常数**。我们果断令这个常数为 A ，即：

$$A = \int_0^1 t f(t) dt$$

于是，原方程瞬间被“降维”成了一个标准的一阶常系数线性微分方程：

$$f'(x) = x f(x) + Ax \implies f'(x) - x f(x) = Ax$$

第二步：求解一阶线性常微分方程

套用一阶线性微分方程的求解套路。寻找积分因子：

$$\mu(x) = e^{\int -x dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

方程两边同乘积分因子 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ ：

$$e^{-\frac{x^2}{2}} f'(x) - x e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) = A x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

逆用乘积的求导法则，左边凑成全导数：

$$\left(f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right)' = A x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

两边同时积分（注意右侧用凑微分法 $d(-\frac{x^2}{2}) = -x dx$ ）：

$$f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = -A e^{-\frac{x^2}{2}} + C_1$$

其中 C_1 为任意常数。将 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 移到右边，得到 $f(x)$ 的表达式：

$$f(x) = C_1 e^{\frac{x^2}{2}} - A$$

第三步：利用积分自洽性，建立常数约束

现在函数表达式里有两个常数 A 和 C_1 ，但这俩并不是独立的！必须把 $f(x)$ 代回我们最初的定义 $A = \int_0^1 t f(t) dt$ 中，去“赎回”这个常数 A 。将 $f(t) = C_1 e^{\frac{t^2}{2}} - A$ 代入定积分：

$$A = \int_0^1 t \left(C_1 e^{\frac{t^2}{2}} - A \right) dt$$

$$A = C_1 \int_0^1 t e^{\frac{t^2}{2}} dt - A \int_0^1 t dt$$

分别计算这两个小积分：

$$\int_0^1 t e^{\frac{t^2}{2}} dt = \left[e^{\frac{t^2}{2}} \right]_0^1 = \sqrt{e} - 1$$

$$\int_0^1 t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

代入上式得到关于 A 的代数方程：

$$A = C_1(\sqrt{e} - 1) - \frac{1}{2}A$$

移项解出 A :

$$\frac{3}{2}A = C_1(\sqrt{e} - 1) \implies A = \frac{2}{3}(\sqrt{e} - 1)C_1$$

第四步：写出最终函数

将算出的常数 A 代回第二步的函数表达式中:

$$f(x) = C_1 e^{\frac{x^2}{2}} - \frac{2}{3}(\sqrt{e} - 1)C_1$$

提出任意常数 C_1 , 得到最终的函数族:

$$f(x) = C_1 \left(e^{\frac{x^2}{2}} - \frac{2}{3}(\sqrt{e} - 1) \right) \quad (C_1 \in \mathbb{R})$$

【评论】 这道压轴题的题眼就在于“自洽性”。遇到带有定积分的函数方程，**定积分本质就是个常数**。先把它看作常数解出函数的框架，然后再把框架套回定积分里去解出这个常数。□

1.4 题目预测

【背景】 在掌握了常规题型后，我们需要针对常微分方程的“冷门”理论死角进行扫盲，同时提升对综合题的敏锐度。本部分包含两道极易被忽略的盲点题型，以及一道深度考验逻辑自洽性的原创压轴题。

例题 1.9: 原创综合题：带积分约束的初值问题 求满足微分方程 $y'(x) - 2y(x) = e^x \int_0^1 y(t)e^{-t}dt$ ，且满足初始条件 $y(0) = 1$ 的解 $y(x)$ 。

解答. 第一步：定积分常数化

令 $A = \int_0^1 y(t)e^{-t}dt$ 。原方程化为一阶常系数线性非齐次方程:

$$y' - 2y = Ae^x$$

第二步：求解带有参数的微分方程

对应齐次方程的通解为 $y_h = Ce^{2x}$ 。对于右端的非齐次项 Ae^x ，由于特征根不是 1，直接设特解为 $y^* = ke^x$ 。代入方程得: $ke^x - 2ke^x = Ae^x \implies -k = A \implies k = -A$ 。所以含参通解为:

$$y(x) = Ce^{2x} - Ae^x$$

第三步：利用自洽性求出参数 A

将 $y(t) = Ce^{2t} - Ae^t$ 代回原来的定积分定义中:

$$A = \int_0^1 (Ce^{2t} - Ae^t)e^{-t}dt = \int_0^1 (Ce^t - A)dt$$

$$A = [Ce^t - At]_0^1 = (Ce - A) - (C - 0) = C(e - 1) - A$$

移项解出 A :

$$2A = C(e - 1) \implies A = \frac{C(e - 1)}{2}$$

将 A 代回 $y(x)$ 的表达式中, 得到只含一个常数的通解:

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{C(e-1)}{2}e^x$$

第四步: 代入初值求解

将初始条件 $y(0) = 1$ 代入:

$$1 = C - \frac{C(e-1)}{2} = C \left(\frac{2-e+1}{2} \right) = C \left(\frac{3-e}{2} \right)$$

解得 $C = \frac{2}{3-e}$ 。将 C 代回, 最终解为:

$$y(x) = \frac{2}{3-e}e^{2x} - \frac{e-1}{3-e}e^x$$

□

例题 1.10: 隐蔽考点一: 缺自变量 x 的可降阶微分方程 求初值问题 $y'' = 2yy'$ 的解, 已知 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ 。

解答. 【核心方法点拨: 链式法则降阶】

方程中完全没有出现自变量 x , 这是经典的“缺 x 型”高阶方程。引入中间变量 $p = y'$, 我们将 p 视为 y 的函数, 即 $p = p(y)$ 。利用链式法则求二阶导数:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

将 y', y'' 代入原方程, 彻底消去 x :

$$p \frac{dp}{dy} = 2yp$$

由于 $y'(0) = 1 \neq 0$, 可以认为在 $x = 0$ 附近 $p \neq 0$, 两边约去 p :

$$\frac{dp}{dy} = 2y \implies p = y^2 + C_1$$

由初值 $y(0) = 1$ 时 $p(0) = y'(0) = 1$, 代入上式得: $1 = 1^2 + C_1 \implies C_1 = 0$ 。于是得到一阶方程: $p = y^2$, 即 $\frac{dy}{dx} = y^2$ 。分离变量并积分:

$$\frac{dy}{y^2} = dx \implies -\frac{1}{y} = x + C_2$$

再次代入初值 $y(0) = 1$ 得: $-1 = 0 + C_2 \implies C_2 = -1$ 。所以 $-\frac{1}{y} = x - 1$, 最终解得:

$$y = \frac{1}{1-x} \quad (x < 1)$$

□

例题 1.11: 隐藏考点二: 寻找积分因子转化为全微分方程 求微分方程 $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$ 的通解。

解答. 【核心方法点拨: 偏导数检验与积分因子构造】

令 $P(x, y) = x^2 + y^2 + x$, $Q(x, y) = xy$. 计算偏导数: $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = y$. 因为 $2y \neq y$, 原方程不是全微分方程, 无法直接凑微分。

我们需要寻找一个积分因子 μ . 计算经典的检验比值:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$

由于这个比值仅仅是 x 的函数, 说明存在一个只依赖于 x 的积分因子:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x \quad (x > 0)$$

将原方程两边同乘 x :

$$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2ydy = 0$$

此时方程已变为全微分方程。重新组合各项进行凑微分:

$$(x^3 + x^2)dx + (xy^2dx + x^2ydy) = 0$$

$$(x^3 + x^2)dx + \frac{1}{2}d(x^2y^2) = 0$$

两边直接积分:

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2y^2 = C$$

即为原方程的隐函数形式通解。

□

2 模块二：多元积分（无需三大公式）（三年 8 题）

【核心复习策略】 本模块集结了所有不依赖格林、高斯、斯托克斯公式的积分考题。命题人的陷阱往往设在巨大的计算量上，而唯一的破局之法就是寻找 ** “对称性” **。同时，对于第一型曲线/曲面积分，准确提取弧长微元 ds 和面积微元 dS 是唯一的得分钥匙。

2.1 二重积分：对称性与积分换序

例题 2.1: 完全对称区域下的奇偶函数抵消 (2025 年期中, 第 1 题) 计算二重积分 $\iint_D (|x| + y)^2 dx dy$, 其中 D 是闭圆域 $x^2 + y^2 \leq a^2 (a > 0)$ 。

解答. 第一步：展开被积函数

将被积函数展开：

$$\iint_D (|x| + y)^2 dx dy = \iint_D (x^2 + 2|x|y + y^2) dx dy$$

第二步：利用区域与函数的对称性化简

积分区域 D 是以原点为中心的圆，关于 x 轴（即 $y \rightarrow -y$ ）完全对称。观察展开后的交叉项 $2|x|y$ ，它是关于 y 的奇函数。根据对称性定理，奇函数在对称区域上的积分为零：

$$\iint_D 2|x|y dx dy = 0$$

第三步：极坐标计算剩余积分

原积分极度简化为 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ 。采用极坐标变换： $x^2 + y^2 = r^2, dx dy = r dr d\theta$ 。

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 \cdot r dr = 2\pi \cdot \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^a = \frac{\pi a^4}{2}$$

□

例题 2.2: 交叉项的对称性剥离 (2023 年期中, 第 6 题) 计算积分 $I = \iint_D (x + y + xy)^2 d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 。

解答. 第一步：展开并识别奇函数

将原式暴力展开：

$$I = \iint_D (x^2 + y^2 + x^2 y^2 + 2xy + 2x^2 y + 2xy^2) dx dy$$

积分区域 D 是单位圆，关于 x 轴和 y 轴均对称。对于关于 x 的奇函数项 ($2xy, 2x^2 y$) 和关于 y 的奇函数项 ($2xy^2$)，它们在 D 上的积分全部为 0。

第二步：极坐标收尾

积分瞬间清爽，只剩下偶次项：

$$I = \iint_D (x^2 + y^2 + x^2 y^2) dx dy$$

转换为极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$:

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2 + r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) r dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^3 + r^5 \frac{1}{4} \sin^2 2\theta) dr$$

先对 r 积分:

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{24} \sin^2 2\theta \right) d\theta = \frac{1}{4}(2\pi) + \frac{1}{24} \cdot \pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{24} = \frac{13\pi}{24}$$

□

例题 2.3: 极品换序题: 依被积函数选择积分顺序 (2023 年期中, 第 7 题) 计算积分

$$I = \iint_D \left(\frac{3x^2 \sin y}{y} + 2e^{x^2} \right) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 由 } y = x, y = x^3 \text{ 围成.}$$

解答. 第一步: 分析区域对称性

两曲线交点为 $(0,0), (1,1), (-1,-1)$ 。区域 D 显然关于原点对称。记 $f_1(x, y) = \frac{3x^2 \sin y}{y}$, 则 $f_1(-x, -y) = f_1(x, y)$, 是偶函数; 同理 $f_2(x, y) = 2e^{x^2}$ 也是偶函数。因此, 我们只需计算第一象限的区域 D_1 ($x \in [0, 1], x^3 \leq y \leq x$), 然后将结果乘 2。

第二步: 拆分积分, 各自换序

这是本题最绝妙之处: 两个项必须采用不同的积分顺序! 对于 $I_1 = 2 \iint_{D_1} \frac{3x^2 \sin y}{y} dx dy$: 必须先对 x 积分, 否则 $\frac{\sin y}{y}$ 无法处理。

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int_0^1 dy \int_y^{y^{1/3}} \frac{3x^2 \sin y}{y} dx = 2 \int_0^1 \frac{\sin y}{y} [x^3]_y^{y^{1/3}} dy = 2 \int_0^1 \frac{\sin y}{y} (y - y^3) dy \\ &= 2 \int_0^1 (\sin y - y^2 \sin y) dy \end{aligned}$$

利用分部积分法计算 $\int y^2 \sin y dy = -y^2 \cos y + 2y \sin y + 2 \cos y$, 代入限值值得:

$$I_1 = 2 [(-\cos y) - (-y^2 \cos y + 2y \sin y + 2 \cos y)]_0^1 = 6 - 4 \cos 1 - 4 \sin 1$$

对于 $I_2 = 2 \iint_{D_1} 2e^{x^2} dx dy$: 必须先对 y 积分, 否则 e^{x^2} 积不出。

$$I_2 = 4 \int_0^1 dx \int_{x^3}^x e^{x^2} dy = 4 \int_0^1 e^{x^2} (x - x^3) dx$$

令 $u = x^2, du = 2x dx$:

$$I_2 = 2 \int_0^1 e^u (1 - u) du$$

分部积分得到 $I_2 = 2 [(2 - u)e^u]_0^1 = 2(e - 2) = 2e - 4$

第三步: 合并结果

总积分 $I = I_1 + I_2 = 2e + 2 - 4 \cos 1 - 4 \sin 1$ 。

□

例题 2.4: 平行四边形区域的 Fubini 定理 (2024 年期中, 第 3 题) 设 D 是由直线 $y = 0, y = 2, y = x, y = x + 2$ 所围成的有界闭区域。求 $\iint_D (\frac{1}{2}x - y) dx dy$ 。

解答. 【核心方法点拨: 直接化为累次积分】

区域 D 被水平线 $y = 0$ 和 $y = 2$ 夹在中间。对于区间 $[0, 2]$ 内的任意固定 y , 左边界为直线 $x = y - 2$, 右边界为直线 $x = y$ 。直接套用 Fubini 定理, 先对 x 积分:

$$\int_0^2 dy \int_{y-2}^y \left(\frac{1}{2}x - y\right) dx$$

内层积分:

$$\left[\frac{1}{4}x^2 - yx\right]_{x=y-2}^{x=y} = \left(\frac{1}{4}y^2 - y^2\right) - \left(\frac{1}{4}(y-2)^2 - y(y-2)\right)$$

化简后神奇地消去了二次项, 留下极为清爽的一次式:

$$-\frac{3}{4}y^2 - \left(-\frac{3}{4}y^2 + y + 1\right) = -y - 1$$

外层积分:

$$\int_0^2 (-y - 1) dy = \left[-\frac{1}{2}y^2 - y\right]_0^2 = -2 - 2 = -4$$

(注: 本题也可作雅可比代换 $u = y, v = y - x$, 算得极快, 但直接积分同样简单。)

□

2.2 三重积分: 坐标系的精准降维

例题 2.5: 三重积分与柱面坐标系 (2023 年期中) 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} \frac{(x+y+z)^2 \sqrt{1+x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)(1+x^2+y^2+z^2)} dV$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{1+x^2+y^2}, z = \sqrt{3(1+x^2+y^2)}, x^2+y^2 = 1$ 所围成的区域。

解答. 第一步: 利用对称性化简被积函数

积分区域 Ω 在 xoy 平面的投影是单位圆盘 $x^2 + y^2 \leq 1$, 且区域关于原点在水平方向是高度对称的 (即分别关于 xoz 面和 $yozy$ 面对称性)。将被积函数的分子展开: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ 。由于区域关于 $x \rightarrow -x$ 对称, 包含奇次项 x 的 $2xy$ 和 $2xz$ 在 Ω 上的积分为 0。同理, 关于 $y \rightarrow -y$ 对称, $2yz$ 的积分也为 0。因此, 积分化简为:

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{1+x^2+y^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)(1+x^2+y^2+z^2)} dV = \iiint_{\Omega} \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{1+x^2+y^2+z^2} dV$$

第二步: 引入柱面坐标系

区域的边界具有明显的圆柱对称性, 采用柱坐标变换: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$ 。体积微元 $dV = r dr d\theta dz$ 。区域 Ω 的极坐标表示为:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq r \leq 1$$

上下曲面边界变为: $\sqrt{1+r^2} \leq z \leq \sqrt{3(1+r^2)}$ 。

第三步: 计算累次积分

被积函数在柱坐标下变为 $\frac{\sqrt{1+r^2}}{1+r^2+z^2}$ 。将其代入计算:

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{\sqrt{1+r^2}}^{\sqrt{3(1+r^2)}} \frac{\sqrt{1+r^2}}{1+r^2+z^2} dz$$

先计算关于 z 的积分。提出常数因子 $\sqrt{1+r^2}$:

$$\int \frac{1}{(1+r^2)+z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{1+r^2}}\right)$$

代入上下限:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{1+r^2}}\right) \right]_{z=\sqrt{1+r^2}}^{z=\sqrt{3}\sqrt{1+r^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} (\arctan \sqrt{3} - \arctan 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{12} \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \end{aligned}$$

将其乘回原本提出的因子 $\sqrt{1+r^2}$:

$$\sqrt{1+r^2} \cdot \frac{\pi}{12} \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} = \frac{\pi}{12}$$

第四步: 完成外层积分

这简直是魔法级的化简! 最内层积分的结果竟然是一个纯常数 $\frac{\pi}{12}$, 完全脱离了 r 。于是剩下的积分异常简单:

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\pi}{12} \cdot r dr = 2\pi \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{12}$$

□

2.3 第一型积分: 微元的准确剥离

例题 2.6: 第一型曲面积分: 寻找面积微元 dS (2024 年期中, 第 4 题) 设 $\mathbb{R}^3$ 中曲面 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 \leq 1, x, y, z \geq 0\}$ 。求第一型曲面积分 $\iint_M x dS$ 。

解答. 第一步: 向坐标平面投影并求偏导

曲面 M 是圆柱面 $x^2 + z^2 = 1$ 位于第一卦限的一块补丁。我们将其视为 $z = z(x, y)$ 投影到 xy 平面上。由于 $z \geq 0$, 显式方程为 $z = \sqrt{1-x^2}$ 。求偏导数: $z_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, z_y = 0$ 。

第二步: 构造面积微元并积分

面积微元 $dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dxdy = \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} dxdy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dxdy$ 。投影区域 D 是由条件 $x^2 + y^2 \leq 1$ 限制在第一象限的部分。将 dS 代入原积分, 转化为二重积分:

$$\iint_M x dS = \iint_D x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dxdy$$

利用直角坐标化为累次积分（先对 y 后对 x ）：

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dy$$

内层对 y 积分相当于直接乘以区间长度 $\sqrt{1-x^2}$ ：

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

过程极其行云流水。 □

例题 2.7: 第一型曲线积分：半圆周上的积分（2024 年期中，第 1 题） 设 L 是 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ 。求第一型曲线积分 $\int_L (3+x) ds$ 。

解答. 【核心方法点拨：极坐标参数化】

第一型曲线积分与路径方向无关，完全取决于曲线的几何形状。遇到圆周，直接使用极坐标进行参数化。令 $x = \cos t, y = \sin t$ ，由于 $y \geq 0$ ，参数 t 的范围是 $[0, \pi]$ 。计算弧长微元：

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = dt$$

代入原积分转化为一元定积分：

$$\int_L (3+x) ds = \int_0^\pi (3 + \cos t) dt = [3t + \sin t]_0^\pi = 3\pi$$

□

例题 2.8: 第一型曲线积分：分段折线积分（2025 年期中，第 3 题） 计算第一型曲线积分 $\int_C (x+y+1) ds$ ，其中 C 是以 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 为顶点的三角形的边界。

解答. 【核心方法点拨：分段积分与线段参数化】

三角形边界是一条分段光滑曲线，由三条线段组成。根据积分的可加性，需分别化为定积分求和： $I = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO}$ 。

1. **底边** OA ($y=0$)：此时 x 的范围是 $[0, 1]$ 。由于 y 是常数 0，弧长微元 $ds = \sqrt{1^2 + 0^2} dx = dx$ 。

$$\int_{OA} (x+y+1) ds = \int_0^1 (x+0+1) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

2. **左边** BO ($x=0$)：此时 y 的范围是 $[0, 1]$ 。由于 x 是常数 0，弧长微元 $ds = \sqrt{0^2 + 1^2} dy = dy$ 。

$$\int_{BO} (x+y+1) ds = \int_0^1 (0+y+1) dy = \left[\frac{1}{2}y^2 + y \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

3. **斜边** AB ($y = 1 - x$): 此时 x 的范围是 $[0, 1]$ 。曲线的导数为 $y' = -1$ 。计算弧长微元: $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + (-1)^2} dx = \sqrt{2} dx$ 。将被积函数中的 y 替换掉: $x + y + 1 = x + (1 - x) + 1 = 2$ 。

$$\int_{AB} (x + y + 1) ds = \int_0^1 2 \cdot \sqrt{2} dx = 2\sqrt{2}$$

将三段积分相加, 得到总积分:

$$I = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

□

3 模块三：三大公式的主场 (三年 9 题)

【核心复习策略】面对第二型曲线和曲面积分，做题的第一反应绝对不是“直接代入参数算”，而是条件反射般地检查三件事：**是否封闭？是否有奇点？能否用三大公式？** 本模块的解答将以最精简的语言，点破每道题背后的场论核心。

3.1 格林公式：奇点剥离与路径变形

例题 3.1: 奇点路径变形的基石 (2024 年期中, 第 2 题) 设 L 是 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$ 取逆时针方向。求第二型曲线积分 $\int_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ 。

解答. 【核心方法点拨：挖洞法】

被积函数 $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$ 。在除原点外的全平面， $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ 。由于原点 $(0, 0)$ 是奇点且在椭圆 L 内部，我们在其内部挖一个以原点为圆心的小圆 $C_\epsilon: x^2 + y^2 = \epsilon^2$ (顺时针为边界正向)。由格林公式，两曲线间的环路积分为 0，故 $\oint_L = \oint_{C_\epsilon^+}$ 。在小圆上，直接极坐标代入 $x = \epsilon \cos \theta, y = \epsilon \sin \theta$:

$$\oint_{C_\epsilon^+} \frac{\epsilon^2 d\theta}{\epsilon^2} = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi$$

□

例题 3.2: 复杂表达式的旋度检验 (2023 年期中, 第 9 题) 计算积分 $I = \oint_\Gamma (\frac{y^2 + y + 4x^2}{4x^2 + y^2} + \sin x^2) dx + (\frac{4x^2 - x + y^2}{4x^2 + y^2} + \sin y^2) dy$ 。其中 Γ 是 $x^2 + y^2 = 9 (y \geq 0)$ 和 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 (y \leq 0)$ 组成的逆时针闭曲线。

解答. 【核心方法点拨：分离保守项 + 椭圆变形】

将 P, Q 拆开: $P = 1 + \sin x^2 + \frac{y}{4x^2 + y^2}, Q = 1 + \sin y^2 - \frac{x}{4x^2 + y^2}$ 。前两项的旋度显然为 0。对于后面的分式项，计算偏导发现 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{4x^2 - y^2}{(4x^2 + y^2)^2}$ 。整个向量场在原点外无旋！因此积分与具体路径无关。将怪异的拼接路径变形为以原点为中心的微小椭圆 $C_\epsilon: 4x^2 + y^2 = \epsilon^2$ 。在该椭圆上参数化: $x = \frac{\epsilon}{2} \cos t, y = \epsilon \sin t$ 。代入分式部分 $Pdx + Qdy = \frac{ydx - xdy}{4x^2 + y^2}$:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{(\epsilon \sin t)(-\frac{\epsilon}{2} \sin t) - (\frac{\epsilon}{2} \cos t)(\epsilon \cos t)}{\epsilon^2} dt = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} dt = -\pi$$

□

例题 3.3: 曲线积分取极限 (2023 年期中, 第 4 题) 设 $I(R) = \oint_{x^2 + y^2 = R^2} \frac{xdy - ydx}{(x^2 + xy + y^2)^2}$ ，证明 $\lim_{R \rightarrow +\infty} I(R) = 0$ 。

解答.【核心方法点拨：极坐标直接放缩】

在圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 上, 使用极坐标 $x = R \cos \theta, y = R \sin \theta$. 分子是标准的极角微元倍数: $x dy - y dx = R^2 d\theta$. 分母提取 R^4 : $(R^2 + R^2 \sin \theta \cos \theta)^2 = R^4(1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta)^2$.

$$I(R) = \frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta)^2} d\theta$$

由于后面的定积分是一个与 R 无关的有限正数, 前面有 $\frac{1}{R^2}$, 当 $R \rightarrow \infty$ 时, 显然 $I(R) \rightarrow 0$. $\square$

3.2 高斯公式：体面积分转换与奇偶分析

例题 3.4: 高斯公式与截锥体体积 (2024 年期中, 第 7 题) $V = \{(x, y, z) | x^2 + 2y^2 \leq z \leq 3 - 2x^2 - y^2\}$. S 是 V 边界的内侧. 求:

$$\iint_{S^-} (x^2 + y \sin z) dy dz - (2y + z \cos x) dz dx + (-2xz + x \sin y) dx dy$$

解答.【核心方法点拨：注意法向与散度计算】

积分曲面取内侧, 高斯公式必须加负号. 计算向量场的散度:

$$\text{Div} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (2x) + (-2) + (-2x) = -2$$

利用高斯公式:

$$I = - \iiint_V (-2) dV = 2 \iiint_V dV = 2 \cdot \text{Vol}(V)$$

求解区域 V 的体积. 联立上下曲面 $x^2 + 2y^2 = 3 - 2x^2 - y^2 \implies x^2 + y^2 = 1$. 投影到 xy 面上为单位圆 D . 体积为:

$$\text{Vol}(V) = \iint_D (3 - 2x^2 - y^2 - (x^2 + 2y^2)) dx dy = 3 \iint_D (1 - x^2 - y^2) dx dy$$

极坐标: $3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^2) r dr = 6\pi [\frac{1}{4}] = \frac{3\pi}{2}$. 最终结果为 $2 \times \frac{3\pi}{2} = 3\pi$. $\square$

例题 3.5: 含有绝对值的散度对称性 (2023 年期中, 第 10 题) 设曲面 S 是圆柱体 $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ 的外侧. 求 $I_1 = \iint_S (y - z)|x| dy dz + (z - x)|y| dz dx + (x - y)z dx dy$ 以及 I_2, I_3 (被积函数中 $|x|$ 分别换为 x^2 和 x^3).

解答.【核心方法点拨：散度的奇偶性通杀】

直接上高斯公式, 区域 Ω 是关于 x, y 轴对称的圆柱. 对于 I_1 : 散度为 $(y - z)\text{sgn}(x) + (z - x)\text{sgn}(y) + (x - y)$. 注意 $\text{sgn}(x)$ 是关于 x 的奇函数. 展开后的每一项, 要么是 x 的奇函数, 要么是 y 的奇函数 (例如 x 就是 x 的奇函数). 由区域对称性, 积分必为 0. 对于 I_2 : 散度为 $2x(y - z) + 2y(z - x) + 2z(x - y)$, 同理全是奇函数, 积分为 0. 对于 I_3 : 散度为 $3x^2(y - z) + 3y^2(z - x) + 3z^2(x - y)$. 展开看 $3x^2y$, 它是 y 的奇函数; 所有项依然全是 x 或 y 的奇函数. 积分为 0. 结论: 利用空间对称性, 这三道题统统为 0! 秒杀! $\square$

例题 3.6: 高斯公式与空间对称性化简 (2025 年期中, 第 5 题) 求第二型曲面积分 $I = \iint_{S^+} (x^2 + x)dydz + (y^2 + y)dzdx + (z^2 + z)dxdy$, S^+ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧。

解答. 【核心方法点拨: 散度计算与奇偶抵消】

曲面封闭取外侧, 符合高斯公式。设 V 为球体内部。

$$I = \iiint_V \left(\frac{\partial(x^2 + x)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2 + y)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2 + z)}{\partial z} \right) dV = \iiint_V (2(x + y + z) + 3) dV$$

积分区域 V 关于三个坐标平面完全对称。奇函数项 $2x, 2y, 2z$ 的积分均为 0。剩下常数项积分:

$$I = \iiint_V 3 dV = 3 \cdot \text{Vol}(V) = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$$

□

3.3 斯托克斯公式: 空间曲线到平面

例题 3.7: 截面投影与旋度向法向量投影 (2025 年期中, 第 4 题) 计算 $I = \oint_{C^+} ydx + zdy + xdz$, C 为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $x + y + z = 0$ 的交线, 从 z 轴正向看为逆时针。

解答. 【核心方法点拨: 平面法向量的直接点乘】

计算向量场的旋度: $\text{Curl} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = (-1, -1, -1)$ 。曲线 C 所在的平面是 $x + y + z = 0$, 由右手法则, 取朝上的单位法向量 $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ 。由斯托克斯公式:

$$I = \iint_S \text{Curl} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \left(-\frac{3}{\sqrt{3}} \right) dS = -\sqrt{3} \iint_S dS$$

曲面 S 是半径为 a 的大圆盘, 面积为 πa^2 。故 $I = -\sqrt{3}\pi a^2$ 。

□

例题 3.8: 柱面截线的斯托克斯应用 (2023 年期中, 第 5 题) 计算积分 $\int_L (y - z + \sin^2 x)dx + (z - x + \sin^2 y)dy + (x - y + \sin^2 z)dz$, L 为 $x^2 + y^2 = 1$ 与 $x + z = 1$ 的交线, 从 z 轴正向看为逆时针。

解答. 【核心方法点拨: 纯偏导微元投影】

包含 $\sin^2 x$ 这种只有单一变量的项, 在求旋度时全部为 0, 直接忽略。求旋度: $\text{Curl} = (-1 - 1, -1 - 1, -1 - 1) = (-2, -2, -2)$ 。曲面 S 选为平面 $z = 1 - x$ 上的椭圆域。方向向上。用 $dx dy$ 微元表示面积微元法向: $d\vec{S} = (-z_x, -z_y, 1)dx dy = (1, 0, 1)dx dy$ 。应用斯托克斯公式:

$$I = \iint_D (-2, -2, -2) \cdot (1, 0, 1) dx dy = \iint_D (-2 - 0 - 2) dx dy = -4 \iint_D dx dy$$

积分区域 D 是圆柱在 xy 面的投影 $x^2 + y^2 \leq 1$, 面积为 π 。故 $I = -4\pi$ 。

□

3.4 抽象函数

例题 3.9: 场论中的核心证明: 保守场与无旋场的等价性 (2025 年期中) 设 $P(x, y), Q(x, y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上有一阶连续偏导数, 且对以任意点 (x_0, y_0) 为中心, 以任意 $R > 0$ 为半径的上半圆 $L: y = y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$ 恒有

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

(对曲线的两个方向都成立)。证明: $P(x, y) \equiv 0, \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \equiv 0$, 对任意 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 。

解答. 第一步: 挖掘线段上的积分信息

令 L 为上半圆弧, 起点为 $A(x_0 - R, y_0)$, 终点为 $B(x_0 + R, y_0)$ 。令 L_0 为连接 A 到 B 的水平直线段 (即 $y = y_0, x$ 从 $x_0 - R$ 到 $x_0 + R$)。取下半圆弧 L' , 它与 L 组成一个完整的圆周 C 。题目已知对于任意上半圆弧, 积分均为 0。这实际上意味着曲线积分不仅与路径无关, 而且极度退化。由于 L 是一条从 A 到 B 的上半圆曲线, 且积分为 0。我们可以取极其扁平的上半圆 (极限情况退化为直线段), 或者更严格地, 利用曲线积分的性质: 由于对于任意 (x_0, y_0) 和 R 积分均为 0, 特别地, 当路径退化为水平直线段 L_0 时 (或利用格林公式构造区域), 我们考察直线段上的积分: 在 L_0 上, 由于 $y = y_0$ 是常数, $dy = 0$ 。若积分与路径完全无关, 且恒为 0, 必然有:

$$\int_{x_0-R}^{x_0+R} P(x, y_0)dx = 0$$

由于 x_0, R 是任意的, 根据变上限积分求导 (或连续函数基本引理), 被积函数必须恒为 0。因此, 对任意 (x, y) , 有 $P(x, y) \equiv 0$ 。

第二步: 利用格林公式证明旋度为零

现在已知 $P \equiv 0$ 。取任意一个由上半圆弧 L 和水平直径 L_0 围成的上半圆区域 D 。设其边界为 $\partial D = L \cup L_0^-$ (其中 L_0^- 为从 B 到 A 的方向)。对区域 D 应用格林公式:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} P dx + Q dy$$

将边界积分分为两部分:

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \int_L (P dx + Q dy) + \int_{L_0^-} (P dx + Q dy)$$

已知 $\int_L = 0$ 。由于 $P \equiv 0$, 且在 L_0^- 上 $dy = 0$, 所以 $\int_{L_0^-} = 0$ 。因此, 环路积分为 0。代入格林公式得到:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = 0$$

由于区域 D (任意位置、任意大小的上半圆) 是任意的, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 连续。如果某一点 $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq 0$ (例如大于 0), 由连续性, 它在一个小邻域内均大于 0, 在这个邻域内取一个小上半圆域 D , 积分必然大于 0, 与上式矛盾。故必须有 $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$ 。证明完毕。□

4 模块四：综合进阶与极限/几何重难点（压轴大赏（三年两题））

【核心复习策略】作为期中考试压轴题，本模块的题目往往不再局限于单一知识点，而是要求极高的“空间对称性拆解能力”或“实分析级别的极限处理能力”。做这类题，切忌埋头死算，必须先宏观上进行几何降维或代数化简。

4.1 几何

例题 4.1: 顶级空间几何：三圆柱相交立体的表面积（2025 年期中，第 2 题）求由三个圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2, y^2 + z^2 = R^2, z^2 + x^2 = R^2$ 所围立体的表面积 ($R > 0$)。

解答. 第一步：利用极度的空间对称性降维

这个立体（广义牟合方盖，Steinmetz solid）由三个完全对称的圆柱面相交而成。整个立体的表面积 A ，必然均等地分布在三个圆柱面上。因此，总面积 $A = 3 \times (\text{位于圆柱 } x^2 + y^2 = R^2 \text{ 上的面积 } S_1)$ 。由于该立体在八个卦限完全对称，我们只看第一卦限。在第一卦限中，圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 上不仅要满足 $z \geq 0$ ，还要受限于另外两个圆柱：

$$z^2 \leq R^2 - x^2 \quad \text{且} \quad z^2 \leq R^2 - y^2$$

即 $0 \leq z \leq \min(\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - y^2})$ 。我们再次利用关于平面 $y = x$ 的对称性：将第一卦限分为 $y \leq x$ 和 $x \leq y$ 两半。在 $y \leq x$ 的区域内， $R^2 - x^2 \leq R^2 - y^2$ ，所以上限由 x 决定，即 $z \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ 。由于一个圆柱面包含 8 个卦限，每个卦限切分两半，所以圆柱 $x^2 + y^2 = R^2$ 上的总面积 S_1 等于 16 块这样的“基本曲面片”的面积！总面积 $A = 3 \times 16 \times (\text{基本曲面片面积}) = 48 \iint_{D_0} dS$ 。

第二步：参数化圆柱面并计算基本曲面片

对圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 进行参数化： $x = R \cos \theta, y = R \sin \theta, z = z$ 。面积微元 $dS = R d\theta dz$ 。在基本曲面片中，限制条件为：1. $0 \leq y \leq x \implies 0 \leq R \sin \theta \leq R \cos \theta \implies 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 。2. $0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2} \implies 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 \theta} = R \sin \theta$ 。计算该积分：

$$\iint_{D_0} dS = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{R \sin \theta} R dz = \int_0^{\pi/4} R \cdot (R \sin \theta) d\theta = R^2 [-\cos \theta]_0^{\pi/4} = R^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

第三步：组合总面积

$$A = 48 \times R^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 24R^2(2 - \sqrt{2})$$

□

4.2 极限大题

【背景】在微积分的进阶考查中，往往会将极限运算与重积分嵌套在一起。当积分区域随着参数变化，且被积函数又是抽象函数时，常规的计算手段将彻底失效。此时的核心策略是：**利用坐标变换（伸缩变换）将动态的变区域化为固定的常区域，提取出参数；然后利用抽象函数在局部的泰勒展开（或可导性定义）进行渐近估计。**

例题 4.2: 重积分与微积分基本定理的极限分析 (2024 年期中) 设 $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 且 $f(0) = 0$, f 在 0 点可导. 对于每个 $t > 0$, 定义区域:

$$V(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 16y^2 + \frac{z^2}{25} \leq t^2 \right\}$$

证明:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^5} \iiint_{V(t)} f\left(x^2 + 16y^2 + \frac{z^2}{25}\right) dx dy dz = \pi f'(0)$$

解答. 第一步: 伸缩变换, 将变区域固定化

积分区域 $V(t)$ 是一个随着 t 缩放的椭球体. 为了将参数 t 从积分限中提取出来, 我们作广义球面坐标 (伸缩) 代换. 令:

$$x = tu, \quad y = \frac{t}{4}v, \quad z = 5tw$$

计算雅可比行列式 (体积放大率):

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = t \cdot \frac{t}{4} \cdot 5t = \frac{5}{4}t^3$$

在此变换下, 原边界不等式 $x^2 + 16y^2 + \frac{z^2}{25} \leq t^2$ 化为了标准单位球 $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$. 我们记该单位球区域为 Ω . 被积函数内部也化简为 $t^2(u^2 + v^2 + w^2)$. 代入原积分式:

$$I(t) = \iiint_{\Omega} f(t^2(u^2 + v^2 + w^2)) \cdot \frac{5}{4}t^3 du dv dw$$

第二步: 球面坐标变换处理标准球体

对标准球体 Ω 使用球面坐标变换: 令 $\rho^2 = u^2 + v^2 + w^2$, 体积微元为 $\rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$. 角度积分 (θ 从 0 到 2π , ϕ 从 0 到 π) 会产生常数 4π :

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{5}{4}t^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_0^1 f(t^2\rho^2)\rho^2 d\rho \\ I(t) &= \frac{5}{4}t^3 \cdot 4\pi \int_0^1 f(t^2\rho^2)\rho^2 d\rho = 5\pi t^3 \int_0^1 f(t^2\rho^2)\rho^2 d\rho \end{aligned}$$

第三步: 局部泰勒展开与极限求值

现在我们来处理题目要求的极限:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(t)}{t^5} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5\pi t^3 \int_0^1 f(t^2\rho^2)\rho^2 d\rho}{t^5} = \lim_{t \rightarrow 0} 5\pi \frac{\int_0^1 f(t^2\rho^2)\rho^2 d\rho}{t^2}$$

利用 $f(x)$ 在 0 点的性质. 因为 $f(0) = 0$ 且在 0 点可导, 根据导数的定义 (皮亚诺余项的泰勒展开), 当 $s \rightarrow 0$ 时:

$$f(s) = f(0) + f'(0)s + o(s) = f'(0)s + o(s)$$

令 $s = t^2\rho^2$, 当 $t \rightarrow 0$ 时 (对于 $\rho \in [0, 1]$ 是一致的), 有:

$$f(t^2\rho^2) = f'(0)t^2\rho^2 + o(t^2\rho^2)$$

将其代入积分中：

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t^2 \rho^2) \rho^2 d\rho &= \int_0^1 (f'(0)t^2 \rho^4 + o(t^2)\rho^2) d\rho \\ &= f'(0)t^2 \left[\frac{1}{5} \rho^5 \right]_0^1 + o(t^2) = \frac{1}{5} f'(0)t^2 + o(t^2)\end{aligned}$$

第四步：完成最终结论

将该积分估计代回极限表达式：

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(t)}{t^5} &= \lim_{t \rightarrow 0} 5\pi \frac{\frac{1}{5} f'(0)t^2 + o(t^2)}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \pi \left(f'(0) + \frac{o(t^2)}{t^2} \right) = \pi f'(0)\end{aligned}$$

证明完毕。

【评论】这道题堪称考场上的“试金石”。很多同学看到求极限和重积分在一起，第一反应是洛必达法则结合积分上限函数求导。但这题由于积分区域 $V(t)$ 的上下限同时包含 t ，且无法直接分离，强行求导将陷入泥潭。核心破局点在于“化动为静”：先通过坐标变换把含有 t 的动态区域固定为常区域 Ω ，让 t 全部转移到被积函数内部；随后利用抽象函数在局部的可微性，把曲线近似为直线（即 $f(x) \approx f'(0)x$ ），从而彻底剥离出极限的本质。□

5 积分题目预测

【模块二预测：隐蔽考点与非标准换元】

例题 5.1：一般变量代换与雅可比行列式（经典隐藏考点） 计算二重积分 $\iint_D (x - y)^2 \sin^2(x + y) dx dy$ ，其中 D 是由直线 $x - y = 0, x - y = \pi, x + y = 0, x + y = \pi$ 所围成的正方形区域。

解答. 【核心方法点拨：倾斜区域的正交化映射】

积分区域 D 是一个倾斜的正方形。如果直接用直角坐标 (x, y) 积分，不仅需要分段，被积函数也非常难以处理。观察边界方程和被积函数的结构，我们自然引入线性代换：

$$u = x - y, \quad v = x + y$$

在此映射下，原本倾斜的区域 D 在 uv 平面上被“拉直”成了一个标准的正方形区域 D' ： $0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq \pi$ 。

接下来计算面积微元的伸缩因子——雅可比行列式（Jacobian）。先求逆映射的偏导数构成的行列式：

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

因此, 从 (u, v) 到 (x, y) 的雅可比行列式的绝对值为:

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|} = \frac{1}{2}$$

将变量和面积微元 $dxdy = |J|dudv$ 代入原积分:

$$\iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y) dxdy = \iint_{D'} u^2 \sin^2 v \left(\frac{1}{2}\right) dudv$$

由于积分区域是矩形, 且被积函数已分离变量, 可直接拆分为两个一元定积分的乘积:

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^\pi u^2 du \right) \left(\int_0^\pi \sin^2 v dv \right)$$

计算这两个基本积分:

$$\int_0^\pi u^2 du = \frac{\pi^3}{3}, \quad \int_0^\pi \sin^2 v dv = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2v}{2} dv = \frac{\pi}{2}$$

最终结果为:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^3}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^4}{12}$$

□

【模块三预测: 空间奇点与高维挖洞法】

例题 5.2: 带奇点的高斯公式: 空间立体角模型 (绝对盲区) 计算曲面积分 $I = \iint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, 其中 S 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 取外侧。

解答. 【核心方法点拨: 3D 挖洞法与通量守恒】

计算该向量场 $\vec{F} = \frac{(x, y, z)}{r^3}$ 的散度 (此处 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$):

$$\text{Div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right)$$

利用 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ 等关系, 耐心求导可得 $\text{Div}(\vec{F}) \equiv 0$ (在原点 $(0, 0, 0)$ 除外)。这是一个极其特殊的场 (点电荷的电场模型)。由于原点在椭球 S 内部, 我们在原点处遭遇了奇点, 不能直接对整个椭球内部使用高斯公式!

为了避开奇点, 在原点周围挖一个半径为 ϵ 的极小球面 S_ϵ (取外侧)。记 S 与 S_ϵ 之间的区域为 V 。在 V 内, 散度处处为 0, 没有奇点。对区域 V 应用高斯公式 (注意内边界 S_ϵ 相对于区域 V 是向内的, 故需加负号):

$$\iiint_V 0 dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} - \iint_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S} \implies \iint_S = \iint_{S_\epsilon}$$

积分转化为在这个微小标准球面 S_ϵ 上的计算。在 S_ϵ 上, $x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2$, 因此分母恒为 ϵ^3 。并且向量场的方向 (x, y, z) 恰好与球面法向量一致。更严谨地, 利用投影微元关系 $xdydz + ydzdx + zdx dy = \epsilon dS$:

$$\iint_{S_\epsilon} \frac{1}{\epsilon^3} (xdydz + ydzdx + zdx dy) = \frac{1}{\epsilon^3} \iint_{S_\epsilon} \epsilon dS = \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{S_\epsilon} dS$$

而球面 S_ϵ 的表面积为 $4\pi\epsilon^2$, 代入得:

$$I = \frac{1}{\epsilon^2} (4\pi\epsilon^2) = 4\pi$$

(无论外部曲面形状如何, 只要包裹了原点, 其通量永远是 4π)。□

【模块四预测】

例题 5.3: 原创顶级压轴: 球面平均值与拉普拉斯算子 设函数 $u(x, y, z)$ 在包含原点的某个邻域内具有连续的二阶偏导数。记 S_R 为以原点为球心、半径为 R 的球面, 取外侧。证明以下极限等式:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R^2} \left[\frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} u(x, y, z) dS - u(0, 0, 0) \right] = \frac{1}{6} \Delta u(0, 0, 0)$$

(其中 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 为拉普拉斯算子)。

解答. 【核心方法点拨: 曲面积分下的多元泰勒展开】

中括号内的表达式 $\frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} u dS$ 实际上是函数 u 在球面 S_R 上的“平均值”。题目要求我们探究这个平均值与原点中心值之差, 在半径极小情况下的渐近行为。

第一步: 引入多元泰勒公式

由于我们要除以 R^2 取极限, 必须将 $u(x, y, z)$ 在原点 $(0, 0, 0)$ 处展开到二阶。记原点为 O :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(O) + (xu_x(O) + yu_y(O) + zu_z(O)) \\ &\quad + \frac{1}{2} (x^2 u_{xx}(O) + y^2 u_{yy}(O) + z^2 u_{zz}(O) + 2xyu_{xy}(O) + 2yzu_{yz}(O) + 2zxu_{zx}(O)) + o(R^2) \end{aligned}$$

其中, 因在球面 S_R 上有 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$, 故高阶无穷小可统一记作 $o(R^2)$ 。

第二步: 利用空间对称性过滤积分项

将上述展开式代入球面积分 $\iint_{S_R} u(x, y, z) dS$ 中。球面的几何对称性将发挥决定性作用。由于 S_R 关于三个坐标平面完全对称: 1. 所有的奇数次幂项 (x, y, z 以及交叉项 xy, yz, zx) 在球面上的积分为严格的 0。2. 所有的二次纯幂项具有轮换对称性, 即:

$$\iint_{S_R} x^2 dS = \iint_{S_R} y^2 dS = \iint_{S_R} z^2 dS$$

因此, 我们可以将其凑为整体半径的平方:

$$\iint_{S_R} x^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{S_R} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \frac{1}{3} \iint_{S_R} R^2 dS = \frac{R^2}{3} (4\pi R^2) = \frac{4\pi}{3} R^4$$

第三步：组装积分并计算极限

利用上述性质，我们对泰勒展开式逐项积分：

$$\begin{aligned}\iint_{S_R} u(x, y, z) dS &= \iint_{S_R} u(O) dS + \frac{1}{2} u_{xx}(O) \iint_{S_R} x^2 dS + \frac{1}{2} u_{yy}(O) \iint_{S_R} y^2 dS \\ &\quad + \frac{1}{2} u_{zz}(O) \iint_{S_R} z^2 dS + \iint_{S_R} o(R^2) dS\end{aligned}$$

代入算出的对称积分值：

$$\iint_{S_R} u(x, y, z) dS = u(O) \cdot 4\pi R^2 + \frac{1}{2} (u_{xx}(O) + u_{yy}(O) + u_{zz}(O)) \left(\frac{4\pi}{3} R^4 \right) + o(R^2) \cdot 4\pi R^2$$

识别出 $\Delta u(O) = u_{xx}(O) + u_{yy}(O) + u_{zz}(O)$ ，式子可整理为：

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} u(x, y, z) dS = u(O) + \frac{R^2}{6} \Delta u(O) + o(R^2)$$

将此式代回题目要求的极限式：

$$\begin{aligned}\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R^2} \left[\left(u(O) + \frac{R^2}{6} \Delta u(O) + o(R^2) \right) - u(O) \right] \\ = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R^2} \left[\frac{R^2}{6} \Delta u(O) + o(R^2) \right] = \frac{1}{6} \Delta u(0, 0, 0)\end{aligned}$$

证明极其完美地闭环。这揭示了拉普拉斯算子的本质：它衡量了一个点周围的局部平均值与该点中心值的偏差。 $\square$