

数项级数和幂级数

秦加俊

2026 年 6 月 20 日

1 真收敛与假收敛

知识 1.1: 级数的特权对照表：真收敛 vs 假收敛

为了直观对比这两种收敛的本质区别，我们梳理了它们在代数操作上的“特权”差异。在处理条件收敛级数时，请务必收起你在初等代数中养成的习惯。

代数操作 / 属性	绝对收敛（真收敛）	条件收敛（假收敛）
定义本质	$\sum u_n$ 与 $\sum u_n $ 均收敛。	$\sum u_n$ 收敛，但 $\sum u_n $ 发散。
交换律（任意重排位置）	绝对合法（和不变） 无论怎么打乱各项相加的顺序，级数的和永远等于同一个常数（Dirichlet 定理）。	致命禁忌（和改变甚至发散） 只要改变各项相加的顺序，你可以让这个级数收敛到任何一个实数，甚至让它发散（Riemann 重排定理）！
分配律（两级数相乘展开）	完全合法 两个绝对收敛的级数作柯西乘积，结果依然 绝对收敛 ，且和等于两和之积。	极度危险 两个条件收敛的级数相乘展开，结果极有可能是发散的。
物理直观	“家底殷实，任性挥霍” 总能量有限，符合人类对数字的常规常识。	“拆东墙补西墙的走钢丝” 靠正负项同阶无穷大抵消维持表面平衡，一碰就碎。

【核心观念转变】 在有限项求和时，加法的交换律（随便换位置）和分配律（乘法展开）是天经地义的。但在无穷级数中，这个特权被无情地剥夺了！

所谓**绝对收敛**，就是级数的“真收敛”——它的总能量（绝对值之和）是有限的，因此你完全可以把它当成有限个数来随意操作。而**条件收敛**，则是级数的“假收敛”——它自身其实是发散的（正项之和与负项之和均为无穷大），它之所以能收敛，全靠正负项之间极其脆弱的“抵消平衡”。只要稍微改变一下求和顺序，这种平衡就会瞬间崩塌！

【考场避坑指南】

当题目要求你计算两个级数的乘积，或者让你将一个级数重新组合求和时，**第一步永远是判断它是否绝对收敛！**只有绝对收敛，你才能放心大胆地去化简和交换；如果是条件收敛，立刻停止一切变换，老老实实按原定义的顺序去求部分和极限。

例题 1.1: 假收敛的背叛：加法交换律的彻底崩塌（黎曼重排魔术） 已知交错调和级数是条件收敛（假收敛）的，且其和为 $\ln 2$ ：

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2$$

请演示：如果不增不减任何数字，仅仅改变各项相加的顺序，如何让它的和变成 $\frac{3}{2} \ln 2$ 。

解答.【解析】：走钢丝的条件收敛被无情戳穿

因为原级数是条件收敛，它对“加法交换律”没有任何免疫力。下面我们开始表演魔术：

首先，将原级数等式两边同乘 $\frac{1}{2}$ ：

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

为了方便对齐，我们在这个新级数中穿插一些 0（加 0 显然不改变和）：

$$\frac{1}{2}S = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots$$

现在，我们将原级数 S 与穿插了 0 的 $\frac{1}{2}S$ 逐项相加：

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \\ + \frac{1}{2}S &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots \\ \frac{3}{2}S &= 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots \end{aligned}$$

我们将相加后结果中的 0 去掉，看看剩下的是什么序列：

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

震撼的真相来了：请仔细观察最后得到的这个级数！它包含了 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$ 所有奇数的正项，也包含了 $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \dots$ 所有偶数的负项。**它包含的数字，跟原级数 S 连一个标点符号都不差！**它仅仅是改变了出场顺序（规则变为：出两个正项，出一个负项）。

仅仅因为换了换加法的位置，同一个级数，和竟然从 $\ln 2$ 变成了 $\frac{3}{2} \ln 2$ ！**结论：**条件收敛级数的本质是“无穷大减无穷大”的危险游戏。绝不能对它们使用任何形式的交换律和结合律。□

例题 1.2: 真收敛的特权：柯西乘积与无限分配律 已知指数函数的麦克劳林展开式为 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ，该级数在全实数轴上**绝对收敛**。请利用级数的乘法（分配律）直接证明

指数运算法则： $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ 。

解答. 【解析】：绝对收敛带来的代数自由

因为 e^x 和 e^y 的级数都是**绝对收敛**的（真收敛），所以我们拥有绝对的特权，可以将这两个无穷多项式像有限多项式一样，放心地进行乘法展开并重新合并同类项（这被称为柯西乘积）。

设 $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ ， $e^y = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}$ 。将它们相乘，并把所有使得 $i+j=n$ 的项归拢到一起：

$$e^x \cdot e^y = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right)$$

观察内部的求和式，这极其眼熟！为了凑出二项式定理，我们在分子分母同乘 $n!$ ：

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

利用二项式定理，内部的求和完美化简为 $(x+y)^n$ 。将其代回原式：

$$e^x \cdot e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

而这恰好就是 e^{x+y} 的泰勒展开式！**结论**：因为绝对收敛，无穷项的乘法分配律完美生效，微积分与初等代数在这里达成了极其优美的统一。□

2 正项级数判别法（绝对收敛）

知识 2.1: 正项级数判别法的底层逻辑：万法归宗“比较法”

核心思想：正项级数没有正负抵消的侥幸，判别其敛散性的**唯一绝对真理就是“比较”**——比收敛的级数小就收敛，比发散的级数大就发散。所有的其他高级判别法，本质上都只是拿原级数去和两个人类最熟悉、敛散性极度明确的“**基准标尺**”（等比级数和 p -级数）作比较，并封装成了方便计算的极限公式。

基准标尺	衰减级别	衍生判别法	公式要领与本质
【万法之源】 直接比较原则	任意级别	直接比较判别法	大收则小收，小发则大发。 $u_n \leq v_n$ 且 $\sum v_n$ 收敛 $\implies \sum u_n$ 收敛。 本质：这是一切判别法的推导起点。
【第一标尺】 等比级数 $\sum q^n$	指数级 (极快)	1. 比值法 (D'Alembert) 2. 根值法 (Cauchy)	公式: $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ 或 $\lim \sqrt[n]{u_n} = \rho$ 结论: $\rho < 1$ 收敛, $\rho > 1$ 发散。 本质: 测算原级数隐藏的“公比”。 拿指数的尺子去量, 一旦遇到多项式级别 (如 $\frac{1}{n^2}$), 尺子就会失效 (算出 $\rho = 1$)。
【第二标尺】 p -级数 $\sum \frac{1}{n^p}$	多项式级 (较慢)	1. 极限比较法 2. 拉贝判别法 (Raabe)	公式: 比较: $\lim \frac{u_n}{1/n^p} = l$ ($0 < l < +\infty$) 拉贝: $\lim n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \rho$ 结论: $\rho > 1$ (或 $\rho > 1$) 收敛; $\rho \leq 1$ (或 $\rho < 1$) 发散。 本质: 当比值法失效 ($\rho = 1$) 时, 说明它是多项式级。拉贝公式本质就是将其展开并与 p -级数对比, 强行提取出它的隐藏次幂 ρ 。

知识 2.2: 正项级数判别法总览：没有最慢收敛，所以没有万能判别法

正项级数没有正负抵消，敛散性完全取决于通项衰减速度。

不存在收敛速度最慢的正项级数，因此也不存在万能判别法。

衰减层级	典型级数	敛散临界线
幂次级	$\sum \frac{1}{n^p}$	$p > 1$ 收敛, $p \leq 1$ 发散 临界发散项是 $\frac{1}{n}$ 。
一层对数修正	$\sum \frac{1}{n(\ln n)^p}$	$p > 1$ 收敛, $p \leq 1$ 发散 临界发散项是 $\frac{1}{n \ln n}$ 。
两层对数修正	$\sum \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}$	$p > 1$ 收敛, $p \leq 1$ 发散 临界发散项是 $\frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$ 。
更多层对数修正	$\sum \frac{1}{n \ln n \ln \ln n \cdots \ln^{(k-1)} n \left(\ln^{(k)} n\right)^p}$	$p > 1$ 收敛, $p \leq 1$ 发散 临界发散项可以继续接下一层对数。

这里

$$\ln^{(1)} n = \ln n, \quad \ln^{(2)} n = \ln \ln n, \quad \ln^{(3)} n = \ln \ln \ln n,$$

依此类推。

为什么没有最慢收敛？

已经知道的慢收敛级数	还可以构造更慢的收敛级数
$\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$	$\sum \frac{1}{n(\ln n)^{1+\varepsilon}}$
$\sum \frac{1}{n(\ln n)^{1+\varepsilon}}$	$\sum \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^{1+\varepsilon}}$
$\sum \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^{1+\varepsilon}}$	$\sum \frac{1}{n \ln n \ln \ln n (\ln \ln \ln n)^{1+\varepsilon}}$

核心结论：

每当找到一个很慢的收敛级数，都可以在临界发散项后再加一层对数，得到更慢的收敛级数。

因此，判别正项级数不能指望一个万能公式，而要根据通项的衰减层级选择比较对象。

题目特征	优先方法
通项含阶乘、连乘、指数型因子	比值判别法、根值判别法
通项像 $\frac{1}{n^p}$	与 p -级数比较
通项像 $\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 或更多层对数	积分判别法、极限比较法
比值法算出极限 1	说明不是指数级衰减，应改用比较法、积分法或 Raabe 判别法

正项级数判别法的底层逻辑：找准衰减层级，然后比较。

2.1 根式判别法与比值判别法：与等比级数比较

例题 2.1: 判别敛散性

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^n}$$

解答. 【解析】: 柯西根值判别法 (Cauchy's Root Test)

观察到通项的形式带有整体的 n 次方，果断使用根值判别法。设 $u_n = \frac{1}{(\ln \ln n)^n} > 0$ 。计算其 n 次方根的极限：

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln \ln n)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \ln n}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \ln n = +\infty$ ，所以：

$$\rho = 0 < 1$$

根据根值判别法，该正项级数**收敛**。

□

例题 2.2: 比值判别法在阶乘与连乘级数中的应用 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!}$ 的敛散性。

解答.【解析】：识别“指数级”衰减速度

通项包含阶乘 $n!$ 和双阶乘 $(2n+1)!! = 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$ 。这种带有强烈“连乘”色彩的级数，其相邻项之比往往能化简为简单的有理分式，因此是比值判别法的首选。

设 $u_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}$ 。计算相邻项之比的极限：

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)!}{(2n+3)!!} \cdot \frac{(2n+1)!!}{n!} \right)$$

利用阶乘和双阶乘的消去性质：

$$\frac{(n+1)!}{n!} = n+1, \quad \frac{(2n+1)!!}{(2n+3)!!} = \frac{1}{2n+3}$$

代入得：

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+3}$$

利用最高次幂抓大头（或洛必达法则）：

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{1}{2}$$

结论：由于 $\rho = \frac{1}{2} < 1$ ，该级数最终的衰减速度等价于一个公比为 $1/2$ 的收敛等比级数。根据比值判别法，原级数**收敛**。□

【方法点拨】：在使用比值判别法时，若算出的极限 $\rho = 1$ ，往往发生在通项是多项式分式（如 $\frac{n^2}{n^4+1}$ ）的情况下，此时应果断放弃比值法，改用极限比较法（找 p -级数标尺）或 Raabe 判别法。

2.2 与 p 级数比较

例题 2.3: Raabe 判别法（含参连乘级数的参数讨论）讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$ ($a > 0, b > 0$) 的敛散性。

解答.【解析】：**第一步：常规试探（比值法失效）**

设 $u_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$ ，由于含有强烈的连乘特征，首先尝试比值判别法：

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a+n}{b+n}$$

取极限：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1+a/n)}{n(1+b/n)} = 1$$

比值法完全失效。这说明该级数不是以指数级衰减的。

第二步：启用 Raabe 判别法进行精密测算

由于比值极限为 1，我们改用 Raabe 判别法，计算其极限 ρ ：

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b+n}{a+n} - 1 \right)$$

通分化简括号内部:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b-a}{a+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{\frac{a}{n} + 1} = b-a$$

第三步: 根据极限 ρ 分类讨论结论

根据 Raabe 判别法的判定标准:

- 当 $\rho = b-a > 1$ (即 $b > a+1$) 时, 级数**收敛**。
- 当 $\rho = b-a < 1$ (即 $b < a+1$) 时, 级数**发散**。
- 当 $\rho = b-a = 1$ (即 $b = a+1$) 时, Raabe 判别法本身通常失效, 但直接代入原级数检验: 此时 $u_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)} = \frac{a}{a+n}$ 。由于 $\frac{a}{a+n} \sim \frac{a}{n}$, 与调和级数等价, 故此时级数**发散**。

结论: 当 $b > a+1$ 时级数收敛; 当 $b \leq a+1$ 时级数发散。 □

2.3 积分判别法: 与可积分函数比较

例题 2.4: 判别敛散性

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot (\ln \ln n)^2}$$

解答. 【解析】: 积分判别法的标准应用

设函数 $f(x) = \frac{1}{x \ln x \cdot (\ln \ln x)^2}$ 。当 $x \geq 3$ 时, $f(x)$ 显然非负、连续, 且单调递减。满足积分判别法的使用条件。考察对应的无穷积分敛散性:

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x \cdot (\ln \ln x)^2}$$

利用凑微分法: 注意到 $d(\ln \ln x) = \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = \frac{1}{x \ln x} dx$, 于是有:

$$\int_3^{+\infty} \frac{d(\ln \ln x)}{(\ln \ln x)^2}$$

令 $u = \ln \ln x$, 原积分变为 $\int_{\ln \ln 3}^{+\infty} u^{-2} du$:

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{u} \right]_{\ln \ln 3}^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{A} + \frac{1}{\ln \ln 3} \right) = \frac{1}{\ln \ln 3}$$

由于反常积分收敛, 由积分判别法可知, 原级数**收敛**。 □

3 任意项级数判别法 (条件收敛)

3.1 Leibniz 判别法

例题 3.1: 判别敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln n}$$

解答. 【解析】: 交错级数与单调性证明

这是一个标准的交错级数。设 $u_n = \frac{1}{n - \ln n}$ ，我们用莱布尼茨判别法验证其两个条件：1. **极限为零**：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(1 - \frac{\ln n}{n})} = 0$$

(因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$)。

2. **单调递减**：设辅助函数 $f(x) = x - \ln x$ ($x \geq 1$)。求导：

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

当 $x > 1$ 时， $f'(x) > 0$ ，所以 $f(x)$ 单调递增。因此其倒数 $u_n = \frac{1}{f(n)}$ 单调递减。满足莱布尼茨判别法，原级数**收敛**。(注：若考查绝对收敛性，由于 $\frac{1}{n - \ln n} > \frac{1}{n}$ ，而调和级数发散，故该级数为**条件收敛**。) $\square$

3.2 两个重要判别法

【核心思想】当级数既不是正项级数，又不是严格的正负交替 (Leibniz 判别法失效) 时，我们通常面对的是类似 $\sin(nx)$ 这样带有复杂振荡的项。此时，我们通过将通项拆解为 $a_n \cdot b_n$ 的形式，利用 Abel 变换 (求和的积分部分) 将其降维打击。

知识 3.1: 乘积型级数的敛散性: Abel 与 Dirichlet 判别法

对于任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ，若序列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足以下两套条件之一，则该级数必**收敛**。

1. Dirichlet 判别法 (狄利克雷) —— “有界配趋零”

- **条件 A (振荡但受控)**: $\sum a_n$ 的部分和序列是有界的。即存在常数 $M > 0$ ，使得对任意 N ，都有 $|\sum_{n=1}^N a_n| \leq M$ 。
- **条件 B (单调且衰减)**: 序列 $\{b_n\}$ 单调，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 。

注：最典型的 a_n 是 $\sin(nx)$ 或 $\cos(nx)$ ；Leibniz 判别法其实就是 $a_n = (-1)^n$ 时 Dirichlet 判别法的特例。

2. Abel 判别法 (阿贝尔) —— “收敛配稳定”

- **条件 A (本身已收敛)**: 级数 $\sum a_n$ 收敛。
- **条件 B (单调且有界)**: 序列 $\{b_n\}$ 单调，且有界 (不要求趋于 0)。

注：如果一个级数已经收敛了，你给它乘上一个单调不发散的“干扰项”，它依然保持收敛。

例题 3.2: Dirichlet 判别法 (三角函数振荡级数) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ ($0 < x < 2\pi$) 的敛散性。

解答. 【解析】: 经典的“有界配趋零”模型

通项包含 $\sin(nx)$, 且带有分母, 这极其符合 Dirichlet 判别法的特征。我们将通项拆解为 $a_n = \sin(nx)$ 和 $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 。

第一步: 验证 a_n 的部分和有界

计算 $\sum_{k=1}^n \sin(kx)$ 的部分和。利用积化和差公式 (分子分母同乘 $2 \sin \frac{x}{2}$):

$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \frac{\sum_{k=1}^n 2 \sin(kx) \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sum_{k=1}^n (\cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x)}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

这是一个裂项相消的和, 中间项全部抵消:

$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

由于 $|\cos \theta| \leq 1$, 所以对于任意的 n , 部分和的绝对值满足:

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin(kx) \right| \leq \frac{1+1}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \quad (\text{因为 } 0 < x < 2\pi, \sin \frac{x}{2} > 0)$$

这是一个与 n 无关的常数, 故 a_n 的部分和有界。

第二步: 验证 b_n 单调趋于 0

$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, 显然随着 n 的增大单调递减, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ 。

结论: 满足 Dirichlet 判别法的两个条件, 故原级数收敛。 □

例题 3.3: Abel 判别法 (收敛级数的稳定微调) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (1 + \frac{1}{n})^n$ 的敛散性。

解答. 【解析】: 识别已收敛的母体与单调干扰项

观察通项, 它显然是由经典的交错调和级数 $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 和著名的极限序列 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 相乘得到的。这直接指向 Abel 判别法。拆解为 $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 和 $b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ 。

第一步: 验证 $\sum a_n$ 收敛

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 是交错调和级数, 由 Leibniz 判别法易知其收敛。

第二步: 验证 b_n 单调且有界

序列 $b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ 是微积分中定义自然对数底 e 的经典序列。1. **单调性:** 利用均值不等式可严格证明 b_n 是严格单调递增的序列。2. **有界性:** 我们熟知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ 。由于它单调递增且收敛于 e , 因此对任意 n , 均有 $b_n < e$, 序列有界。

结论: a_n 构成的级数收敛, 序列 b_n 单调且有界, 满足 Abel 判别法的条件。因此原级数收敛。 □

3.3 单调性缺失情形

例题 3.4: 渐进展开 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 的敛散性, 确定是绝对收敛还是条件收敛。

解答. 【解析】: 泰勒展开法应对非单调交错级数

第一步: 绝对收敛性判定

取绝对值后为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 。当 $n \rightarrow \infty$ 时, 通项与 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 等价:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}}} = 1$$

由于 p -级数 $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ ($p = 1/2 \leq 1$) 发散, 根据极限比较判别法, 原级数**不绝对收敛**。

第二步: 条件收敛性判定 (极易错点)

虽然它是交错级数, 但通项绝对值 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ **并不是单调递减的**, 莱布尼茨判别法失效! 必须进行泰勒展开剥离出其本质。

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{-1/2}$$

利用 $(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2)$ 展开:

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$$

我们将原级数拆分为三个级数的和: 1. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 满足莱布尼茨条件, 收敛。2. $\sum \frac{1}{2n^{3/2}}$ 是 p -级数 ($p = 3/2 > 1$), 收敛。3. 余项级数 $\sum O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$ 绝对收敛。因为这三个级数分别都收敛, 所以它们的代数和 (原级数) 也**收敛**。综上, 原级数为**条件收敛**。□

例题 3.5: 没有明显单调部分时: 先剥离标准主部 设 $0 < x < 2\pi$, 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n + \sin n}$$

的敛散性。

解答. 【解析】: 难点在于单调因子被扰动项藏起来了。

这个级数看起来很像 Dirichlet 判别法的题, 因为有振荡项 $\sin nx$ 。但是它并没有直接写成

$$\sin nx \cdot \frac{1}{n}$$

的形式, 而是

$$\frac{\sin nx}{n + \sin n}.$$

其中

$$\frac{1}{n + \sin n}$$

虽然趋于 0, 但由于分母里含有振荡项 $\sin n$, 它并不是一个一眼可见的单调数列。因此不能机械地直接套 Dirichlet 判别法。

这类题的标准处理方法是: **先把扰动因子展开, 剥离出熟悉的主部。**

注意到

$$\frac{1}{n + \sin n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sin n}{n}}.$$

因为

$$\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0,$$

所以利用展开式

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + O(t^2), \quad t \rightarrow 0,$$

得到

$$\frac{1}{n + \sin n} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\sin n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right).$$

因此

$$\frac{1}{n + \sin n} = \frac{1}{n} - \frac{\sin n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

代回原级数通项:

$$\frac{\sin nx}{n + \sin n} = \frac{\sin nx}{n} - \frac{\sin nx \sin n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

于是原级数可以拆成

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n + \sin n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

下面分别判断三部分。

第一部分:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

由 Dirichlet 判别法收敛。因为当 $0 < x < 2\pi$ 时,

$$\sum_{k=1}^N \sin kx$$

的部分和有界, 而

$$\frac{1}{n}$$

单调趋于 0。

第二部分:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin n}{n^2}$$

绝对收敛, 因为

$$\left| \frac{\sin nx \sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

收敛。

第三部分:

$$\sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

也绝对收敛。

综上, 原级数收敛。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n + \sin n} \text{ 收敛。}$$

方法总结:

当题目中没有明显单调因子时, 不要硬套 Dirichlet 或 Abel 判别法。常见技巧是先做渐近展开:

复杂因子 = 标准单调主部 + 绝对收敛误差。

本题中就是

$$\frac{1}{n + \sin n} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是

$$\frac{\sin nx}{n + \sin n} = \frac{\sin nx}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

主部用 Dirichlet 判别法, 误差项用绝对收敛控制。

□

例题 3.6: 一道题中多次用判别法, 注意到 **Abel** 判别法可以在一个级数判别中多次使用讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (0 < x < 2\pi, p > 0)$$

的收敛性。

解答. 【解析】: 关键是识别 “已收敛级数 $\times$ 单调有界扰动”。

令

$$a_n = \frac{\sin nx}{n^p}, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

首先讨论

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}.$$

当 $x = \pi$ 时,

$$\sin n\pi = 0,$$

所以原级数恒为 0, 显然收敛。

下面设 $0 < x < 2\pi$ 且 $x \neq \pi$ 。由三角恒等式可知

$$\sum_{k=1}^N \sin kx = \frac{\sin \frac{Nx}{2} \sin \frac{(N+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

因此

$$\left| \sum_{k=1}^N \sin kx \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}.$$

所以 $\sum \sin nx$ 的部分和有界。

另一方面,

$$\frac{1}{n^p}$$

当 $p > 0$ 时单调趋于 0。由 Dirichlet 判别法,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$$

收敛。

接下来观察扰动因子

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

这是经典数列, 单调递增且有界, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

因此原级数可以看成

$$\sum a_n b_n,$$

其中

$$\sum a_n$$

已经收敛, 而 b_n 单调有界。

由 Abel 判别法可知,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

收敛。

对任意 $0 < x < 2\pi$, $p > 0$, 原级数收敛。

补充: 绝对收敛性

由于

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e,$$

所以它只改变通项的常数倍大小，不改变绝对收敛的临界指数。

当 $p > 1$ 时，

$$\left| \frac{\sin nx}{n^p} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right| \leq \frac{C}{n^p},$$

故级数绝对收敛。

当 $0 < p \leq 1$ 时，除 $x = \pi$ 这种通项恒为 0 的特殊情形外，一般不是绝对收敛，而是条件收敛。

$p > 1$ 时绝对收敛； $0 < p \leq 1$ 时主要体现条件收敛。

方法总结：

本题不能把

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

误认为 Dirichlet 判别法中的“趋零因子”，因为它实际上趋于 e 。

正确视角是：

$\frac{\sin nx}{n^p}$ 先由 Dirichlet 判别法得到收敛， $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 再作为 Abel 判别法中的单调有界扰动。

□

4 函数项级数与一致收敛

【核心精要】从常数项级数跨越到函数项级数，最大的难点在于“极限运算的交换”。求和本身是一种极限，而求导、积分也是极限。为了保证无穷求和与微积分操作能够合法交换顺序，数学家引入了极其重要的“一致收敛”概念。

知识 4.1: 核心概念与终极判定：一致收敛与 M 判别法

核心概念 / 定理	内涵本质与结论要点
逐点收敛 vs 一致收敛	逐点收敛：每个 x 各自为战。固定一个 x_0，级数 $\sum u_n(x_0)$ 收敛。 一致收敛 (Uniform Convergence)：全局步调一致。不管 x 取区间内的哪个值，逼近和函数 $S(x)$ 的速度都有一个统一的下限。
Weierstrass M 判别法 (维尔斯特拉斯判别法)	操作：找一个无视 x 的常数放大器。对区间内任意 x，有 $u_n(x) \leq M_n$。 结论：如果正常数项级数 $\sum M_n$ 收敛，那么函数项级数 $\sum u_n(x)$ 必定在区间上绝对且一致收敛。 (注：这是考场上证明一致收敛几乎唯一的实战武器。)

知识 4.2: 一致收敛赋予的三大“分析特权”

分析特权	前提条件与核心结论
特权 1: 连续性	前提: 各项 $u_n(x)$ 都连续, 且级数在区间上一致收敛。 结论: 和函数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 必然也是连续的。
特权 2: 逐项积分	前提: 各项 $u_n(x)$ 连续, 且级数在区间上一致收敛。 结论: “无穷求和”与“积分”可以合法交换位置: $\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x) dx \right)$
特权 3: 逐项求导	前提: (要求最苛刻) 原级数在某点收敛, 且导函数构成的级数 $\sum u'_n(x)$ 一致收敛。 结论: “无穷求和”与“求导”可以合法交换位置: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$

【考场实战守则】: 证明一致收敛, 首选 **M 判别法**。看到通项里有 $\sin(nx)$ 、 $\cos(nx)$ 或者 $\arctan(nx)$, 立刻利用它们的有界性进行无情放缩 (例如 $\frac{\sin(nx)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$), 瞬间就能用 p -级数把一致收敛性证出来!

5 幂级数收敛域

知识 5.1: 幂级数收敛域的判断流程: 先半径, 后端点

幂级数收敛域问题的核心, 不是上来就乱代点, 而是要按照固定顺序处理:

先求收敛半径 $R \implies$ 再单独检查端点

一、标准幂级数: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$

第 1 步: 先求收敛半径。

常用两种公式:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

或者

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

其中, 比值法适合阶乘、连乘、指数型系数; 根值法适合带有 n 次方、复杂指数或整体幂次的系数。

第 2 步: 得到内部绝对收敛、外部发散。

幂级数一定满足:

$$|x - x_0| < R \implies \text{绝对收敛},$$

$$|x - x_0| > R \implies \text{发散}.$$

第 3 步: 最后单独检查两个端点。

端点

$$x = x_0 - R, \quad x = x_0 + R$$

必须分别代回原级数, 变成普通数项级数后重新判断。

注意: 端点没有统一结论, 可能都收敛、都发散, 也可能一收一发。

例题 5.1: 求下列幂级数的收敛区域 (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$ (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}$ ($a > 0, b > 0$)

解答. (1) 采用根值判别法:

设一般项 $u_n = \frac{x^{n^2}}{2^n}$, 计算其 n 次方根的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^{n^2}}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{2}$$

- 当 $|x| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{2} = 0 < 1$, 级数绝对收敛。
- 当 $|x| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{2} = +\infty > 1$, 级数发散。
- 当 $|x| = 1$ 时, 原级数化为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, 这是公比为 $1/2$ 的等比级数, 收敛。

综上所述, 该级数的收敛区域为闭区间 $[-1, 1]$ 。

(2) 寻找等价的渐近行为:

不失一般性, 设 $c = \max(a, b)$, 则对于充分大的 n , 有 $c^n \leq a^n + b^n \leq 2c^n$ 。计算系数 $c_n = \frac{1}{a^n + b^n}$ 的收敛半径 R :

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a^n + b^n}}} = c = \max(a, b)$$

接下来验证端点 $x = \pm \max(a, b)$:

- 当 $x = \max(a, b)$ 时, 通项 $u_n = \frac{c^n}{a^n + b^n} \geq \frac{c^n}{2c^n} = \frac{1}{2}$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 级数发散。

- 当 $x = -\max(a, b)$ 时, 通项 $u_n = (-1)^n \frac{c^n}{a^n + b^n}$, 同样因一般项不趋于 0 而发散。

故收敛区域为开区间 $(-\max(a, b), \max(a, b))$ 。□

6 幂级数求和

6.1 和函数

例题 6.1: 求和函数 (1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n+1} x^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} \left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2n}$

解答. (1) 先微后积法处理多项式系数:

记和函数为 $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n+1} x^n$, 其收敛域为 $(-1, 1)$ 。为了消去分母, 方程两边同乘 x :

$$xS(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n+1} x^{n+1}$$

两边对 x 求导:

$$(xS(x))' = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)^2 x^n = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)^2 x^{n-2}$$

令 $k = n - 1$, 则级数化为 $x^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1}$ 。已知 $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$, 经过两次求导可得标准结果 $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$ 。所以:

$$(xS(x))' = \frac{x^2(1+x)}{(1-x)^3}$$

对上式两边从 0 到 x 积分 (令 $u = 1 - t$ 进行换元计算):

$$xS(x) = \int_0^x \frac{t^2(1+t)}{(1-t)^3} dt = \frac{4x-3}{(1-x)^2} - 4\ln(1-x) - x + 3$$

当 $x \neq 0$ 时, 两边除以 x 得:

$$S(x) = \frac{4x-3}{x(1-x)^2} - \frac{4\ln(1-x)}{x} - 1 + \frac{3}{x}$$

且 $S(0) = 0$ 。

(2) 换元与裂项法:

令 $t = \left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2 \geq 0$, 研究辅助级数 $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} t^n$ 。利用裂项法 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 将级数拆分为两部分:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} t^n$$

我们熟知对数展开式 $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$ 。对于第二部分, 提出一个 $\frac{1}{t}$ 并调整符号:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} t^n = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1} = \frac{1}{t} (\ln(1+t) - t)$$

将两部分合并：

$$f(t) = \ln(1+t) + \frac{\ln(1+t)-t}{t} = \left(1 + \frac{1}{t}\right) \ln(1+t) - 1 \quad (t > 0)$$

当 $t = 0$ 时 $f(0) = 0$ 。级数收敛需 $t \leq 1$ ，即 $\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2 \leq 1 \implies x \in (-\infty, 0]$ 。最后将 t 替换回原式，即为所求的和函数。 $\square$

6.2 级数的和

例题 6.2: 证明级数收敛并求其和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+2)(n^2+2n+3)}$$

解答. 【证明与求解】：裂项相消法

观察分母的两项： (n^2+2) 与 (n^2+2n+3) 。注意到 $(n+1)^2+2 = n^2+2n+3$ ，这恰好是前后相邻的形态！分子恰好是这两项的差： $(n^2+2n+3) - (n^2+2) = 2n+1$ 。因此，一般项可以完美裂项：

$$u_n = \frac{(n^2+2n+3) - (n^2+2)}{(n^2+2)(n^2+2n+3)} = \frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{(n+1)^2+2}$$

计算前 N 项的部分和 S_N ：

$$S_N = \left(\frac{1}{1^2+2} - \frac{1}{2^2+2}\right) + \left(\frac{1}{2^2+2} - \frac{1}{3^2+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N^2+2} - \frac{1}{(N+1)^2+2}\right)$$

中间项全抵消，得到：

$$S_N = \frac{1}{3} - \frac{1}{(N+1)^2+2}$$

因为 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(N+1)^2+2} = 0$ ，故级数收敛，且其和为 $\frac{1}{3}$ 。 $\square$

例题 6.3: 求下列级数的和 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

解答. (1) 代数恒等变形与莱布尼茨级数：

将通项拆项： $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ 。原级数设为 S ，展开可得：

$$2S = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) - \cdots$$

重组各项系数：

$$2S = 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{5} - 2 \cdot \frac{1}{7} + \cdots = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \right) - 1$$

括号内是经典的 Gregory-Leibniz 级数，其和为 $\frac{\pi}{4}$ 。代入得 $2S = 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$ ，故原级数和 $S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ 。

(2) 构造幂级数求导:

考虑幂级数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$, 所求即为 $f(\frac{1}{2})$ 。已知几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, 逐项求导:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \implies \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}$$

两边连续求二次导数, 得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

方程两边同乘 x :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

代入 $x = \frac{1}{2}$, 得 $f(\frac{1}{2}) = \frac{2 \cdot (1/2)}{(1-1/2)^3} = 8$ 。

(3) 借用指数函数展开:

对于 n^2 , 通过降阶化简为阶乘形式: $n^2 = n(n-1) + n$ 。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

平移指标后, 两部分均等于 e 的泰勒展开 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ 。故原级数和为 $e + e = 2e$ 。 $\square$

例题 6.4: 求无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} (2^n)^{\frac{1}{3^n}}$$

解答. 【解析】: 取对数化为无穷级数

设无穷乘积的值为 P 。对两边取自然对数, 将连乘转化为求和:

$$\ln P = \ln \left[\prod_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n}{3^n}} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(2^{\frac{n}{3^n}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \ln 2 = (\ln 2) \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, 利用 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ 求导并同乘 x 易知:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

代入 $x = \frac{1}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{3} \right)^n = \frac{1/3}{(1-1/3)^2} = \frac{1/3}{4/9} = \frac{3}{4}$$

因此, $\ln P = \frac{3}{4} \ln 2 = \ln(2^{3/4})$ 。解得无穷乘积 $P = 2^{3/4} = \sqrt[4]{8}$ 。 $\square$

7 幂级数展开

例题 7.1: 求下列函数在 $x = 0$ 处的幂级数展开式

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}, \quad \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \frac{1}{(1-x)^3}$$

解答. 【解析】: 基本初等函数展开的组合与求导

(1) 展开 $\frac{1}{(1-x)^2}$ 和 $\frac{1}{(1-x)^3}$ (建议先做这两个, 后面会用到): 已知基础几何级数: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ($|x| < 1$). 对其逐项求导一次:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

再次逐项求导:

$$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n$$

故 $\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n$.

(2) 展开 $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$: 利用有理函数的部分分式分解:

$$\frac{x}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1+x}$$

通分对比系数可求得 $A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{4}$. 将各部分分别展开:

$$-\frac{1}{4(1-x)} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \frac{1}{2(1-x)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, \quad -\frac{1}{4(1+x)} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

合并同类项, 得到:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4} + \frac{n+1}{2} - \frac{(-1)^n}{4} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1-(-1)^n}{4} x^n \quad (|x| < 1)$$

(3) 展开 $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$: 利用对数的性质拆分: $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$. 分别代入标准展开式:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

两式相减:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} + 1}{n} x^n$$

当 n 为偶数 ($n = 2k$) 时, 系数为 0; 当 n 为奇数 ($n = 2k+1$) 时, 系数为 $\frac{2}{2k+1}$. 故展开式为: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} x^{2k+1}$ ($|x| < 1$). $\square$

例题 7.2: 幂级数求和的应用 应用 $\frac{e^x-1}{x}$ 在 $x=0$ 的幂级数展开, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$$

解答. 【证明】:

已知指数函数的标准展开式: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$ 则有:

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

为了造出目标级数中的分子 n , 我们对上式两边关于 x 求导. 等式右边逐项求导 (并平移指标令 $k = n - 1$, 或直接保持形式):

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \right)' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} x^{n-2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(m+1)!} x^{m-1}$$

等式左边使用商的求导法则:

$$\left(\frac{e^x - 1}{x} \right)' = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2}$$

因此, 恒等式为:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(m+1)!} x^{m-1} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

令 $x = 1$ 代入上式:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(m+1)!} = \frac{1 \cdot e^1 - e^1 + 1}{1^2} = 1$$

证明完毕. □

例题 7.3: 利用幂级数求不定式极限 利用函数的幂级数展开式求不定式极限:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

解答. 【解析】: 变量代换与泰勒展开

令 $t = \frac{1}{x}$. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow 0$. 原极限转化为:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2}$$

利用 $\ln(1+t)$ 在 $t=0$ 处的麦克劳林展开式:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3)$$

代入极限式中:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \left(t - \frac{t^2}{2} + O(t^3) \right)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2}{2} - O(t^3)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} - O(t) \right) = \frac{1}{2}$$

□

例题 7.4: 间接展开法 将 $\ln x$ 按 $\frac{x-1}{x+1}$ 的幂展开成幂级数。

解答. 【解析】: 巧用代换桥梁

设目标变量 $t = \frac{x-1}{x+1}$ 。我们需要解出 x 关于 t 的表达式:

$$t(x+1) = x-1 \implies xt - x = -t - 1 \implies x = \frac{1+t}{1-t}$$

于是, 将 $\ln x$ 按 t 展开, 就等价于求 $\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$ 按 t 的幂级数展开! 根据题目 2.1 的结论, 我们已经知道:

$$\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \quad (|t| < 1)$$

将 $t = \frac{x-1}{x+1}$ 替换回去, 即得所求展开式:

$$\ln x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$$

(该级数在 $x > 0$ 时均收敛, 这是一种非常优良的求对数近似值的方法)。

□

例题 7.5: 泰勒级数敛散性的深刻反例 已知 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ($x \neq 0$), 且 $f(0) = 0$ 。

- 求 $f^{(n)}(0)$, 并写出 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处展开的泰勒级数。
- 这个级数在哪些点上收敛到原函数?

解答. 【解析】: 柯西平坦函数 (Cauchy's flat function)

(1) 求导与泰勒级数:

利用导数定义求 $f'(0)$:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x}$$

令 $t = \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow \infty$ 。极限化为 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t^2}}$ 。根据洛必达法则, 指数增长远快于多项式, 故极限为 0。通过数学归纳法可以证明, 对于任意正整数 n , $f^{(n)}(x)$ 都可以表示为 $P(1/x)e^{-1/x^2}$ 的形式 (其中 P 为多项式)。因此, 在 $x = 0$ 处取极限, 均有:

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} P(1/x)e^{-1/x^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(t)}{e^{t^2}} = 0$$

所以, 该函数在 $x = 0$ 处的所有阶导数均为 0。其在 $x = 0$ 处的泰勒级数为:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots = 0$$

(即一个恒为 0 的级数)。

(2) 收敛性分析:

该泰勒级数的值对于任意实数 x 显然都等于 0 (收敛域为 $(-\infty, +\infty)$)。然而, 原函数 $f(x) = e^{-1/x^2}$

仅在 $x = 0$ 时等于 0。只要 $x \neq 0$, 则 $e^{-1/x^2} > 0$ 。因此, 这个泰勒级数**仅仅在 $x = 0$ 这一点上**收敛到了原函数。这说明无穷阶可导的函数 (光滑函数), 其泰勒级数即便处处收敛, 也未必等于原函数 (即该函数不是解析函数)。□