

无穷级数 · I

秦加俊

2026 年 6 月 20 日

1 真收敛与假收敛

知识 1.1: 级数的特权对照表：真收敛 vs 假收敛

为了直观对比这两种收敛的本质区别，我们梳理了它们在代数操作上的“特权”差异。在处理条件收敛级数时，请务必收起你在初等代数中养成的习惯。

代数操作 / 属性	绝对收敛（真收敛）	条件收敛（假收敛）
定义本质	$\sum u_n$ 与 $\sum u_n $ 均收敛。	$\sum u_n$ 收敛，但 $\sum u_n $ 发散。
交换律（任意重排位置）	绝对合法（和不变） 无论怎么打乱各项相加的顺序，级数的和永远等于同一个常数（Dirichlet 定理）。	致命禁忌（和改变甚至发散） 只要改变各项相加的顺序，你可以让这个级数收敛到任何一个实数，甚至让它发散（Riemann 重排定理）！
结合律（加删括号）	完全合法 可以任意加括号，也可以任意拆括号。	单向合法（只能加不能拆） 可以加括号（不改变原收敛和），但 绝对不能随便去括号 （拆开后极有可能发散）。
分配律（两级数相乘展开）	完全合法 两个绝对收敛的级数作柯西乘积，结果依然 绝对收敛 ，且和等于两和之积。	极度危险 两个条件收敛的级数相乘展开，结果极有可能是发散的。
物理直观	“家底殷实，任性挥霍” 总能量有限，符合人类对数字的常规常识。	“拆东墙补西墙的走钢丝” 靠正负项同阶无穷大抵消维持表面平衡，一碰就碎。

【核心观念转变】 在有限项求和时，加法的交换律（随便换位置）和分配律（乘法展开）是天经

地义的。但在无穷级数中，这个特权被无情地剥夺了！

所谓**绝对收敛**，就是级数的“真收敛”——它的总能量（绝对值之和）是有限的，因此你完全可以把它当成有限个数来随意操作。而**条件收敛**，则是级数的“假收敛”——它自身其实是发散的（正项之和与负项之和均为无穷大），它之所以能收敛，全靠正负项之间极其脆弱的“抵消平衡”。只要稍微改变一下求和顺序，这种平衡就会瞬间崩塌！

【考场避坑指南】

当题目要求你计算两个级数的乘积，或者让你将一个级数重新组合求和时，**第一步永远是判断它是否绝对收敛！**只有绝对收敛，你才能放心大胆地去化简和交换；如果是条件收敛，立刻停止一切变换，老老实实按原定义的顺序去求部分和极限。

【经典案例大赏：真假收敛的实战对决】

例题 1.1: 真收敛的特权：柯西乘积与无限分配律 已知指数函数的麦克劳林展开式为 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ，该级数在全实数轴上**绝对收敛**。请利用级数的乘法（分配律）直接证明指数运算法则： $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ 。

解答. 【解析】：绝对收敛带来的代数自由

因为 e^x 和 e^y 的级数都是**绝对收敛**的（真收敛），所以我们拥有绝对的特权，可以将这两个无穷多项式像有限多项式一样，放心地进行乘法展开并重新合并同类项（这被称为柯西乘积）。

设 $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ ， $e^y = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}$ 。将它们相乘，并把所有使得 $i+j=n$ 的项归拢到一起：

$$e^x \cdot e^y = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right)$$

观察内部的求和式，这极其眼熟！为了凑出二项式定理，我们在分子分母同乘 $n!$ ：

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

利用二项式定理，内部的求和完美化简为 $(x+y)^n$ 。将其代回原式：

$$e^x \cdot e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

而这恰好就是 e^{x+y} 的泰勒展开式！**结论：**因为绝对收敛，无穷项的乘法分配律完美生效，微积分与初等代数在这里达成了极其优美的统一。□

例题 1.2: 假收敛的背叛：加法交换律的彻底崩塌（黎曼重排魔术） 已知交错调和级数是**条件收敛**（假收敛）的，且其和为 $\ln 2$ ：

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2$$

请演示：如果不增不减任何数字，仅仅改变各项相加的顺序，如何让它的和变成 $\frac{3}{2} \ln 2$ 。

解答.【解析】：走钢丝的条件收敛被无情戳穿

因为原级数是条件收敛，它对“加法交换律”没有任何免疫力。下面我们开始表演魔术：

首先，将原级数等式两边同乘 $\frac{1}{2}$ ：

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

为了方便对齐，我们在这个新级数中穿插一些 0（加 0 显然不改变和）：

$$\frac{1}{2}S = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \dots$$

现在，我们将原级数 S 与穿插了 0 的 $\frac{1}{2}S$ 逐项相加：

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \\ + \frac{1}{2}S &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \dots \\ \frac{3}{2}S &= 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots \end{aligned}$$

我们将相加后结果中的 0 去掉，看看剩下的是什么序列：

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

震撼的真相来了：请仔细观察最后得到的这个级数！它包含了 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$ 所有奇数的正项，也包含了 $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \dots$ 所有偶数的负项。**它包含的数字，跟原级数 S 连一个标点符号都不差！**它仅仅是改变了出场顺序（规则变为：出两个正项，出一个负项）。

仅仅因为换了换加法的位置，同一个级数，和竟然从 $\ln 2$ 变成了 $\frac{3}{2} \ln 2$ ！**结论：**条件收敛级数的本质是“无穷大减无穷大”的危险游戏。绝不能对它们使用任何形式的交换律和结合律。□

2 正项级数判别法

不存在收敛速度最慢的级数！

知识 2.1: 正项级数判别法的底层逻辑：万法归宗“比较法”

核心思想：正项级数没有正负抵消的侥幸，判别其敛散性的**唯一绝对真理就是“比较”**——比收敛的级数小就收敛，比发散的级数大就发散。所有的其他高级判别法，本质上都只是拿原级数去和两个人类最熟悉、敛散性极度明确的“**基准标尺**”（等比级数和 p -级数）作比较，并封装成了方便计算的极限公式。

基准标尺	衰减级别	衍生判别法	公式要领与本质
【万法之源】 直接比较原则	任意级别	直接比较判别法	大收则小收，小发则大发。 $u_n \leq v_n$ 且 $\sum v_n$ 收敛 $\implies \sum u_n$ 收敛。 本质：这是一切判别法的推导起点。
【第一标尺】 等比级数 $\sum q^n$	指数级 (极快)	1. 比值法 (D'Alembert) 2. 根值法 (Cauchy)	公式: $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ 或 $\lim \sqrt[n]{u_n} = \rho$ 结论: $\rho < 1$ 收敛, $\rho > 1$ 发散。 本质: 测算原级数隐藏的“公比”。 拿指数的尺子去量, 一旦遇到多项式级别 (如 $\frac{1}{n^2}$), 尺子就会失效 (算出 $\rho = 1$)。
【第二标尺】 p -级数 $\sum \frac{1}{n^p}$	多项式级 (较慢)	1. 极限比较法 2. 拉贝判别法 (Raabe)	公式: 比较: $\lim \frac{u_n}{1/n^p} = l$ ($0 < l < +\infty$) 拉贝: $\lim n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \rho$ 结论: $\rho > 1$ (或 $\rho > 1$) 收敛; $\rho \leq 1$ (或 $\rho < 1$) 发散。 本质: 当比值法失效 ($\rho = 1$) 时, 说明它是多项式级。拉贝公式本质就是将其展开并与 p -级数对比, 强行提取出它的隐藏次幂 ρ 。

2.1 根式判别法与比值判别法：与等比级数比较

例题 2.1: 判别敛散性

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^n}$$

解答. 【解析】：柯西根值判别法 (Cauchy's Root Test)

观察到通项的形式带有整体的 n 次方, 果断使用根值判别法。设 $u_n = \frac{1}{(\ln \ln n)^n} > 0$ 。计算其 n 次方根的极限：

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln \ln n)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \ln n}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \ln n = +\infty$, 所以:

$$\rho = 0 < 1$$

根据根值判别法, 该正项级数**收敛**。 □

例题 2.2: 比值判别法在阶乘与连乘级数中的应用 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!}$ 的敛散性。

解答. 【解析】: 识别“指数级”衰减速度

通项包含阶乘 $n!$ 和双阶乘 $(2n+1)!! = 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$ 。这种带有强烈“连乘”色彩的级数, 其相邻项之比往往能化简为简单的有理分式, 因此是比值判别法的首选。

设 $u_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}$ 。计算相邻项之比的极限:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)!}{(2n+3)!!} \cdot \frac{(2n+1)!!}{n!} \right)$$

利用阶乘和双阶乘的消去性质:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = n+1, \quad \frac{(2n+1)!!}{(2n+3)!!} = \frac{1}{2n+3}$$

代入得:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+3}$$

利用最高次幂抓大头 (或洛必达法则):

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{1}{2}$$

结论: 由于 $\rho = \frac{1}{2} < 1$, 该级数最终的衰减速度等价于一个公比为 $1/2$ 的收敛等比级数。根据比值判别法, 原级数**收敛**。 □

【方法点拨】: 在使用比值判别法时, 若算出的极限 $\rho = 1$, 往往发生在通项是多项式分式 (如 $\frac{n^2}{n^4+1}$) 的情况下, 此时应果断放弃比值法, 改用极限比较法 (找 p -级数标尺) 或 Raabe 判别法。

2.2 与 p 级数比较

例题 2.3: Raabe 判别法 (含参连乘级数的参数讨论) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$ ($a > 0, b > 0$) 的敛散性。

解答. 【解析】:

第一步: 常规试探 (比值法失效)

设 $u_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$, 由于含有强烈的连乘特征, 首先尝试比值判别法:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a+n}{b+n}$$

取极限：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1+a/n)}{n(1+b/n)} = 1$$

比值法完全失效。这说明该级数不是以指数级衰减的。

第二步：启用 Raabe 判别法进行精密测算

由于比值极限为 1，我们改用 Raabe 判别法，计算其极限 ρ ：

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b+n}{a+n} - 1 \right)$$

通分化简括号内部：

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b-a}{a+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{\frac{a}{n} + 1} = b-a$$

第三步：根据极限 ρ 分类讨论结论

根据 Raabe 判别法的判定标准：

- 当 $\rho = b-a > 1$ （即 $b > a+1$ ）时，级数**收敛**。
- 当 $\rho = b-a < 1$ （即 $b < a+1$ ）时，级数**发散**。
- 当 $\rho = b-a = 1$ （即 $b = a+1$ ）时，Raabe 判别法本身通常失效，但直接代入原级数检验：
此时 $u_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)} = \frac{a}{a+n}$ 。由于 $\frac{a}{a+n} \sim \frac{a}{n}$ ，与调和级数等价，故此时级数**发散**。

结论：当 $b > a+1$ 时级数收敛；当 $b \leq a+1$ 时级数发散。 □

2.3 积分判别法：与可积函数比较

例题 2.4：判别敛散性

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot (\ln \ln n)^2}$$

解答. 【解析】：积分判别法的标准应用

设函数 $f(x) = \frac{1}{x \ln x \cdot (\ln \ln x)^2}$ 。当 $x \geq 3$ 时， $f(x)$ 显然非负、连续，且单调递减。满足积分判别法的使用条件。考察对应的无穷积分敛散性：

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x \cdot (\ln \ln x)^2}$$

利用凑微分法：注意到 $d(\ln \ln x) = \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = \frac{1}{x \ln x} dx$ ，于是有：

$$\int_3^{+\infty} \frac{d(\ln \ln x)}{(\ln \ln x)^2}$$

令 $u = \ln \ln x$ ，原积分变为 $\int_{\ln \ln 3}^{+\infty} u^{-2} du$ ：

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{u} \right]_{\ln \ln 3}^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{A} + \frac{1}{\ln \ln 3} \right) = \frac{1}{\ln \ln 3}$$

由于反常积分收敛，由积分判别法可知，原级数**收敛**。 □

2.4 直接判别法

例题 2.5: 判别级数敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n}}{2n - \ln n}$$

解答. 【解析】: 必要条件 (第 n 项检验法)

在动用复杂的判别法之前, 第一反应应始终是检查一般项是否趋于零。求通项 u_n 的极限, 分子分母同除以最高阶项 n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sqrt{n}}{2n - \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{2 - \frac{\ln n}{n}} = \frac{1 - 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

因为通项极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 不满足级数收敛的必要条件。所以, 该级数**发散**。□

3 任意项级数判别法

3.1 Leibniz 判别法

例题 3.1: 判别敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln n}$$

解答. 【解析】: 交错级数与单调性证明

这是一个标准的交错级数。设 $u_n = \frac{1}{n - \ln n}$, 我们用莱布尼茨判别法验证其两个条件: 1. **极限为零**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(1 - \frac{\ln n}{n})} = 0$$

(因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$)。

2. **单调递减**: 设辅助函数 $f(x) = x - \ln x$ ($x \geq 1$)。求导:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 单调递增。因此其倒数 $u_n = \frac{1}{f(n)}$ 单调递减。满足莱布尼茨判别法, 原级数**收敛**。(注: 若考查绝对收敛性, 由于 $\frac{1}{n - \ln n} > \frac{1}{n}$, 而调和级数发散, 故该级数为**条件收敛**。) □

3.2 两个重要判别法

【核心思想】 当级数既不是正项级数, 又不是严格的正负交替 (Leibniz 判别法失效) 时, 我们通常面对的是类似 $\sin(nx)$ 这样带有复杂振荡的项。此时, 我们通过将通项拆解为 $a_n \cdot b_n$ 的形式, 利用 Abel 变换 (求和的积分部分) 将其降维打击。

知识 3.1: 乘积型级数的敛散性: Abel 与 Dirichlet 判别法

对于任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, 若序列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足以下两套条件之一, 则该级数必收敛。

1. Dirichlet 判别法 (狄利克雷) —— “有界配趋零”

- **条件 A (振荡但受控):** $\sum a_n$ 的部分和序列是有界的。即存在常数 $M > 0$, 使得对任意 N , 都有 $|\sum_{n=1}^N a_n| \leq M$ 。
- **条件 B (单调且衰减):** 序列 $\{b_n\}$ 单调, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 。

注: 最典型的 a_n 是 $\sin(nx)$ 或 $\cos(nx)$; *Leibniz* 判别法其实就是 $a_n = (-1)^n$ 时 *Dirichlet* 判别法的特例。

2. Abel 判别法 (阿贝尔) —— “收敛配稳定”

- **条件 A (本身已收敛):** 级数 $\sum a_n$ 收敛。
- **条件 B (单调且有界):** 序列 $\{b_n\}$ 单调, 且有界 (不要求趋于 0)。

注: 如果一个级数已经收敛了, 你给它乘上一个单调且不发散的“干扰项”, 它依然保持收敛。

例题 3.2: Dirichlet 判别法 (三角函数振荡级数) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ ($0 < x < 2\pi$) 的敛散性。

解答. 【解析】: 经典的“有界配趋零”模型

通项包含 $\sin(nx)$, 且带有分母, 这极其符合 Dirichlet 判别法的特征。我们将通项拆解为 $a_n = \sin(nx)$ 和 $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 。

第一步: 验证 a_n 的部分和有界

计算 $\sum_{k=1}^n \sin(kx)$ 的部分和。利用积化和差公式 (分子分母同乘 $2 \sin \frac{x}{2}$):

$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \frac{\sum_{k=1}^n 2 \sin(kx) \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sum_{k=1}^n (\cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x)}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

这是一个裂项相消的和, 中间项全部抵消:

$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

由于 $|\cos \theta| \leq 1$, 所以对于任意的 n , 部分和的绝对值满足:

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin(kx) \right| \leq \frac{1+1}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \quad (\text{因为 } 0 < x < 2\pi, \sin \frac{x}{2} > 0)$$

这是一个与 n 无关的常数, 故 a_n 的部分和有界。

第二步：验证 b_n 单调趋于 0

$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ，显然随着 n 的增大单调递减，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ 。

结论：满足 Dirichlet 判别法的两个条件，故原级数**收敛**。 $\square$

例题 3.3: Abel 判别法 (收敛级数的稳定微调) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 的敛散性。

解答. 【解析】：识别已收敛的母体与单调干扰项

观察通项，它显然是由经典的交错调和级数 $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 和著名的极限序列 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 相乘得到的。这直接指向 Abel 判别法。拆解为 $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 和 $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 。

第一步：验证 $\sum a_n$ 收敛

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 是交错调和级数，由 Leibniz 判别法易知其**收敛**。

第二步：验证 b_n 单调且有界

序列 $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 是微积分中定义自然对数底 e 的经典序列。1. **单调性**：利用均值不等式可严格证明 b_n 是严格单调递增的序列。2. **有界性**：我们熟知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ 。由于它单调递增且收敛于 e ，因此对任意 n ，均有 $b_n < e$ ，序列有界。

结论： a_n 构成的级数收敛，序列 b_n 单调且有界，满足 Abel 判别法的条件。因此原级数**收敛**。 $\square$

4 拓展题目

例题 4.1: 渐近分析与条件收敛 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 的敛散性，确定是绝对收敛还是条件收敛。

解答. 【解析】：泰勒展开法应对非单调交错级数**第一步：绝对收敛性判定**

取绝对值后为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 。当 $n \rightarrow \infty$ 时，通项与 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 等价：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}}} = 1$$

由于 p -级数 $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ ($p = 1/2 \leq 1$) 发散，根据极限比较判别法，原级数**不绝对收敛**。

第二步：条件收敛性判定 (极易错点)

虽然它是交错级数，但通项绝对值 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ **并不是单调递减的**，莱布尼茨判别法失效！必须进行泰勒展开剥离出其本质。

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{-1/2}$$

利用 $(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2)$ 展开:

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$$

我们将原级数拆分为三个级数的和: 1. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 满足莱布尼茨条件, 收敛。2. $\sum \frac{1}{2n^{3/2}}$ 是 p -级数 ($p = 3/2 > 1$), 收敛。3. 余项级数 $\sum O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$ 绝对收敛。因为这三个级数分别都收敛, 所以它们的代数和 (原级数) 也收敛。综上, 原级数为条件收敛。□

例题 4.2: 巧妙的组合级数求和 计算级数的和:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \cdots$$

其中分母为质因数只由 3 和 5 构成的所有正整数 (按从小到大的顺序排列)。

解答. 【解析】: 几何级数乘积的逆向应用

仔细审题, 该级数的分母包含了所有形式为 $3^i 5^j$ 的整数 (其中 $i \geq 0, j \geq 0$, 且 $i+j \geq 1$ 剔除了 1 这个数)。这提示我们将该求和转化为两个独立几何级数的柯西乘积。考虑以下两个几何级数的乘积:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} \right) \times \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{5^j} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^i 5^j}$$

右边的双重求和完美地生成了所有质因数只含 3 和 5 的分母的倒数和。但需要注意, 它包含了 $i=0, j=0$ 的情况 (此时分母为 $3^0 5^0 = 1$), 而题目给出的级数是从 $\frac{1}{3}$ 开始的, 不含 1。

设题目要求的级数和为 S , 则有:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} \right) \times \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{5^j} \right) = 1 + S$$

分别计算左边两个收敛的等比级数的和:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^j = \frac{1}{1-1/5} = \frac{5}{4}$$

将结果代入等式:

$$\frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = 1 + S \implies \frac{15}{8} = 1 + S$$

解得: $S = \frac{15}{8} - 1 = \frac{7}{8}$ 。 □

例题 4.3: 超越函数的极致裂项：反三角级数求和 求下列包含反三角函数的无穷级数的和：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$$

解答.【解析】: 寻找反三角函数的“裂项密码”

面对反三角函数的无穷求和，传统的比值、根值、或者幂级数展开全部失效。破局的关键在于回想高中三角函数的一个冷门但极其强大的差角公式：

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

对两边取反正切，我们得到反正切函数的差值公式：

$$\arctan x - \arctan y = \arctan\left(\frac{x - y}{1 + xy}\right) \quad (xy > -1)$$

第一步：逆向构造恒等式

我们的目标是把通项 $\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$ 强行凑成 $\arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$ 的形式。首先，为了制造分母上的“ $1 + \dots$ ”，我们将 $\frac{1}{2n^2}$ 的分子分母同乘 2：

$$\frac{1}{2n^2} = \frac{2}{4n^2}$$

现在处理分母 $4n^2$ ：强行给它分离出一个 1，得到 $1 + (4n^2 - 1)$ 。利用平方差公式，将 $4n^2 - 1$ 分解为 $(2n + 1)(2n - 1)$ 。此时，分母已经变成了 $1 + (2n + 1)(2n - 1)$ 的形态，这意味着我们找到了 x 和 y 的候选人：

$$x = 2n + 1, \quad y = 2n - 1$$

奇迹发生的地方在于分子：恰好有 $x - y = (2n + 1) - (2n - 1) = 2$ ！这与我们分子上的 2 完美契合。

第二步：执行多米诺骨牌裂项

根据上述构造，通项被完美拆解为两项之差：

$$\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right) = \arctan\left(\frac{(2n + 1) - (2n - 1)}{1 + (2n + 1)(2n - 1)}\right) = \arctan(2n + 1) - \arctan(2n - 1)$$

现在，我们写出级数的前 N 项部分和 S_N ：

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \left[\arctan(2n + 1) - \arctan(2n - 1) \right] \\ &= (\arctan 3 - \arctan 1) \\ &\quad + (\arctan 5 - \arctan 3) \\ &\quad + (\arctan 7 - \arctan 5) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (\arctan(2N + 1) - \arctan(2N - 1)) \end{aligned}$$

内部的项像多米诺骨牌一样全部对角抵消，只留下第一项的尾巴和最后一项的头：

$$S_N = \arctan(2N + 1) - \arctan 1$$

第三步：取极限得出最终和

令 $N \rightarrow \infty$ ，由于 $\lim_{N \rightarrow \infty} \arctan(2N + 1) = \frac{\pi}{2}$ ，且 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ ：

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

结论：这个充满离散平方数和超越函数的无限组合，最终完美收敛于几何常数 $\frac{\pi}{4}$ 。 □