

无穷级数 · II

秦加俊

2026 年 6 月 20 日

1 函数项级数与一致收敛

【核心精要】从常数项级数跨越到函数项级数，最大的难点在于“极限运算的交换”。求和本身是一种极限，而求导、积分也是极限。为了保证无穷求和与微积分操作能够合法交换顺序，数学家引入了极其重要的“一致收敛”概念。

知识 1.1: 核心概念与终极判定：一致收敛与 M 判别法

核心概念 / 定理	内涵本质与结论要点
逐点收敛 vs 一致收敛	逐点收敛：每个 x 各自为战。固定一个 x_0，级数 $\sum u_n(x_0)$ 收敛。 一致收敛 (Uniform Convergence)：全局步调一致。不管 x 取区间内的哪个值，逼近和函数 $S(x)$ 的速度都有一个统一的下限。
Weierstrass M 判别法 (维尔斯特拉斯判别法)	操作：找一个无视 x 的常数放大器。对区间内任意 x，有 $u_n(x) \leq M_n$。 结论：如果正常数项级数 $\sum M_n$ 收敛，那么函数项级数 $\sum u_n(x)$ 必定在区间上绝对且一致收敛。 (注：这是考场上证明一致收敛几乎唯一的实战武器。)

知识 1.2: 一致收敛赋予的三大“分析特权”

分析特权	前提条件与核心结论
特权 1: 连续性	前提: 各项 $u_n(x)$ 都连续, 且级数在区间上一致收敛。 结论: 和函数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 必然也是连续的。
特权 2: 逐项积分	前提: 各项 $u_n(x)$ 连续, 且级数在区间上一致收敛。 结论: “无穷求和”与“积分”可以合法交换位置: $\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x) dx \right)$
特权 3: 逐项求导	前提: (要求最苛刻) 原级数在某点收敛, 且导函数构成的级数 $\sum u'_n(x)$ 一致收敛。 结论: “无穷求和”与“求导”可以合法交换位置: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$

【考场实战守则】: 证明一致收敛, 首选 **M 判别法**。看到通项里有 $\sin(nx)$ 、 $\cos(nx)$ 或者 $\arctan(nx)$, 立刻利用它们的有界性进行无情放缩 (例如 $\frac{\sin(nx)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$), 瞬间就能用 p -级数把一致收敛性证出来!

2 幂级数求和

2.1 收敛区域

例题 2.1: 求下列幂级数的收敛区域 (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$ (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}$ ($a > 0, b > 0$)

解答. (1) 采用根值判别法:

设一般项 $u_n = \frac{x^{n^2}}{2^n}$, 计算其 n 次方根的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^{n^2}}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{2}$$

- 当 $|x| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{2} = 0 < 1$, 级数绝对收敛。
- 当 $|x| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{2} = +\infty > 1$, 级数发散。
- 当 $|x| = 1$ 时, 原级数化为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, 这是公比为 $1/2$ 的等比级数, 收敛。

综上所述, 该级数的收敛区域为闭区间 $[-1, 1]$ 。

(2) 寻找等价的渐近行为:

不失一般性, 设 $c = \max(a, b)$, 则对于充分大的 n , 有 $c^n \leq a^n + b^n \leq 2c^n$ 。计算系数 $c_n = \frac{1}{a^n + b^n}$ 的收敛半径 R :

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a^n + b^n}}} = c = \max(a, b)$$

接下来验证端点 $x = \pm \max(a, b)$:

- 当 $x = \max(a, b)$ 时, 通项 $u_n = \frac{c^n}{a^n + b^n} \geq \frac{c^n}{2c^n} = \frac{1}{2}$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 级数发散。
- 当 $x = -\max(a, b)$ 时, 通项 $u_n = (-1)^n \frac{c^n}{a^n + b^n}$, 同样因一般项不趋于 0 而发散。

故收敛区域为开区间 $(-\max(a, b), \max(a, b))$ 。□

2.2 和函数

例题 2.2: 求和函数 (1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n+1} x^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} \left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2n}$

解答. (1) 先微后积法处理多项式系数:

记和函数为 $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n+1} x^n$, 其收敛域为 $(-1, 1)$ 。为了消去分母, 方程两边同乘 x :

$$xS(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n+1} x^{n+1}$$

两边对 x 求导:

$$(xS(x))' = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)^2 x^n = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)^2 x^{n-2}$$

令 $k = n - 1$, 则级数化为 $x^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1}$ 。已知 $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$, 经过两次求导可得标准结果 $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$ 。所以:

$$(xS(x))' = \frac{x^2(1+x)}{(1-x)^3}$$

对上式两边从 0 到 x 积分 (令 $u = 1 - t$ 进行换元计算):

$$xS(x) = \int_0^x \frac{t^2(1+t)}{(1-t)^3} dt = \frac{4x-3}{(1-x)^2} - 4\ln(1-x) - x + 3$$

当 $x \neq 0$ 时, 两边除以 x 得:

$$S(x) = \frac{4x-3}{x(1-x)^2} - \frac{4\ln(1-x)}{x} - 1 + \frac{3}{x}$$

且 $S(0) = 0$ 。

(2) 换元与裂项法:

令 $t = \left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2 \geq 0$, 研究辅助级数 $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} t^n$ 。利用裂项法 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 将级数拆分为两部分:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} t^n$$

我们熟知对数展开式 $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$ 。对于第二部分，提出一个 $\frac{1}{t}$ 并调整符号：

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} t^n = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1} = \frac{1}{t} (\ln(1+t) - t)$$

将两部分合并：

$$f(t) = \ln(1+t) + \frac{\ln(1+t) - t}{t} = \left(1 + \frac{1}{t}\right) \ln(1+t) - 1 \quad (t > 0)$$

当 $t = 0$ 时 $f(0) = 0$ 。级数收敛需 $t \leq 1$ ，即 $\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2 \leq 1 \implies x \in (-\infty, 0]$ 。最后将 t 替换回原式，即为所求的和函数。 $\square$

2.3 级数的和

例题 2.3: 证明级数收敛并求其和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+2)(n^2+2n+3)}$$

解答. 【证明与求解】：裂项相消法

观察分母的两项： (n^2+2) 与 (n^2+2n+3) 。注意到 $(n+1)^2+2 = n^2+2n+3$ ，这恰好是前后相邻的形态！分子恰好是这两项的差： $(n^2+2n+3) - (n^2+2) = 2n+1$ 。因此，一般项可以完美裂项：

$$u_n = \frac{(n^2+2n+3) - (n^2+2)}{(n^2+2)(n^2+2n+3)} = \frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{(n+1)^2+2}$$

计算前 N 项的部分和 S_N ：

$$S_N = \left(\frac{1}{1^2+2} - \frac{1}{2^2+2}\right) + \left(\frac{1}{2^2+2} - \frac{1}{3^2+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N^2+2} - \frac{1}{(N+1)^2+2}\right)$$

中间项全抵消，得到：

$$S_N = \frac{1}{3} - \frac{1}{(N+1)^2+2}$$

因为 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(N+1)^2+2} = 0$ ，故级数收敛，且其和为 $\frac{1}{3}$ 。 $\square$

例题 2.4: 求下列级数的和 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

解答. (1) 代数恒等变形与莱布尼茨级数：

将通项拆项： $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$ 。原级数设为 S ，展开可得：

$$2S = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) - \cdots$$

重组各项系数：

$$2S = 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{5} - 2 \cdot \frac{1}{7} + \cdots = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) - 1$$

括号内是经典的 Gregory-Leibniz 级数, 其和为 $\frac{\pi}{4}$ 。代入得 $2S = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$, 故原级数和 $S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ 。

(2) 构造幂级数求导:

考虑幂级数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$, 所求即为 $f(\frac{1}{2})$ 。已知几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, 逐项求导:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}$$

两边连续求二次导数, 得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

方程两边同乘 x :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

代入 $x = \frac{1}{2}$, 得 $f(\frac{1}{2}) = \frac{2 \cdot (1/2)}{(1-1/2)^3} = 8$ 。

(3) 借用指数函数展开:

对于 n^2 , 通过降阶化简为阶乘形式: $n^2 = n(n-1) + n$ 。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

平移指标后, 两部分均等于 e 的泰勒展开 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ 。故原级数和为 $e + e = 2e$ 。 $\square$

例题 2.5: 求无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} (2^n)^{\frac{1}{3^n}}$$

解答. 【解析】: 取对数化为无穷级数

设无穷乘积的值为 P 。对两边取自然对数, 将连乘转化为求和:

$$\ln P = \ln \left[\prod_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n}{3^n}} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(2^{\frac{n}{3^n}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \ln 2 = (\ln 2) \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, 利用 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ 求导并同乘 x 易知:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

代入 $x = \frac{1}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{3} \right)^n = \frac{1/3}{(1-1/3)^2} = \frac{1/3}{4/9} = \frac{3}{4}$$

因此, $\ln P = \frac{3}{4} \ln 2 = \ln(2^{3/4})$ 。解得无穷乘积 $P = 2^{3/4} = \sqrt[4]{8}$ 。 $\square$

3 幂级数展开

例题 3.1: 求下列函数在 $x = 0$ 处的幂级数展开式

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}, \quad \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \frac{1}{(1-x)^3}$$

解答. 【解析】: 基本初等函数展开的组合与求导

(1) 展开 $\frac{1}{(1-x)^2}$ 和 $\frac{1}{(1-x)^3}$ (建议先做这两个, 后面会用到): 已知基础几何级数: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ($|x| < 1$). 对其逐项求导一次:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

再次逐项求导:

$$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n$$

故 $\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n$.

(2) 展开 $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$: 利用有理函数的部分分式分解:

$$\frac{x}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1+x}$$

通分对比系数可求得 $A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{4}$. 将各部分分别展开:

$$-\frac{1}{4(1-x)} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \frac{1}{2(1-x)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, \quad -\frac{1}{4(1+x)} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

合并同类项, 得到:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4} + \frac{n+1}{2} - \frac{(-1)^n}{4} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1-(-1)^n}{4} x^n \quad (|x| < 1)$$

(3) 展开 $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$: 利用对数的性质拆分: $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$. 分别代入标准展开式:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

两式相减:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} + 1}{n} x^n$$

当 n 为偶数 ($n = 2k$) 时, 系数为 0; 当 n 为奇数 ($n = 2k+1$) 时, 系数为 $\frac{2}{2k+1}$. 故展开式为: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} x^{2k+1}$ ($|x| < 1$). $\square$

例题 3.2: 幂级数求和的应用 应用 $\frac{e^x-1}{x}$ 在 $x=0$ 的幂级数展开, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$$

解答. 【证明】:

已知指数函数的标准展开式: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$ 则有:

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

为了造出目标级数中的分子 n , 我们对上式两边关于 x 求导. 等式右边逐项求导 (并平移指标令 $k = n - 1$, 或直接保持形式):

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \right)' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} x^{n-2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(m+1)!} x^{m-1}$$

等式左边使用商的求导法则:

$$\left(\frac{e^x - 1}{x} \right)' = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2}$$

因此, 恒等式为:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(m+1)!} x^{m-1} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

令 $x = 1$ 代入上式:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(m+1)!} = \frac{1 \cdot e^1 - e^1 + 1}{1^2} = 1$$

证明完毕. □

例题 3.3: 利用幂级数求不定式极限 利用函数的幂级数展开式求不定式极限:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

解答. 【解析】: 变量代换与泰勒展开

令 $t = \frac{1}{x}$. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow 0$. 原极限转化为:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2}$$

利用 $\ln(1+t)$ 在 $t=0$ 处的麦克劳林展开式:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3)$$

代入极限式中:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \left(t - \frac{t^2}{2} + O(t^3) \right)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2}{2} - O(t^3)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} - O(t) \right) = \frac{1}{2}$$

□

例题 3.4: 间接展开法 将 $\ln x$ 按 $\frac{x-1}{x+1}$ 的幂展开成幂级数。

解答. 【解析】: 巧用代换桥梁

设目标变量 $t = \frac{x-1}{x+1}$ 。我们需要解出 x 关于 t 的表达式:

$$t(x+1) = x-1 \implies xt - x = -t - 1 \implies x = \frac{1+t}{1-t}$$

于是, 将 $\ln x$ 按 t 展开, 就等价于求 $\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$ 按 t 的幂级数展开! 根据题目 2.1 的结论, 我们已经知道:

$$\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \quad (|t| < 1)$$

将 $t = \frac{x-1}{x+1}$ 替换回去, 即得所求展开式:

$$\ln x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$$

(该级数在 $x > 0$ 时均收敛, 这是一种非常优良的求对数近似值的方法)。

□

例题 3.5: 泰勒级数敛散性的深刻反例 已知 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ($x \neq 0$), 且 $f(0) = 0$ 。

- 求 $f^{(n)}(0)$, 并写出 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处展开的泰勒级数。
- 这个级数在哪些点上收敛到原函数?

解答. 【解析】: 柯西平坦函数 (Cauchy's flat function)

(1) 求导与泰勒级数:

利用导数定义求 $f'(0)$:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x}$$

令 $t = \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow \infty$ 。极限化为 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t^2}}$ 。根据洛必达法则, 指数增长远快于多项式, 故极限为 0。通过数学归纳法可以证明, 对于任意正整数 n , $f^{(n)}(x)$ 都可以表示为 $P(1/x)e^{-1/x^2}$ 的形式 (其中 P 为多项式)。因此, 在 $x = 0$ 处取极限, 均有:

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} P(1/x)e^{-1/x^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(t)}{e^{t^2}} = 0$$

所以, 该函数在 $x = 0$ 处的所有阶导数均为 0。其在 $x = 0$ 处的泰勒级数为:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots = 0$$

(即一个恒为 0 的级数)。

(2) 收敛性分析:

该泰勒级数的值对于任意实数 x 显然都等于 0 (收敛域为 $(-\infty, +\infty)$)。然而, 原函数 $f(x) = e^{-1/x^2}$ 仅在 $x = 0$ 时等于 0。只要 $x \neq 0$, 则 $e^{-1/x^2} > 0$ 。因此, 这个泰勒级数仅仅在 $x = 0$ 这一点上收敛到了原函数。这说明无穷阶可导的函数 (光滑函数), 其泰勒级数即便处处收敛, 也未必等于原函数 (即该函数不是解析函数)。

□

4 拓展：常微分方程的幂级数解法

【本节小结】在常微分方程的学习中，我们已经掌握了常系数线性方程和极为特殊的变系数方程（如欧拉方程）的解法。然而，在实际的物理与工程问题中，绝大多数变系数微分方程（如贝塞尔方程、勒让德方程）根本不存在“有限的初等函数解”。

面对这种绝境，数学家们转换了思路：既然找不到现成的函数，我们就用无穷多项式（即幂级数）去硬生生地“逼近”它。只要我们能求出这个幂级数的各项系数，我们就等同于解出了这个方程。这种方法不仅是微分方程理论的基石，更为后续的特殊函数理论打开了物理世界的大门。

知识 4.1: 常微分方程幂级数解法：标准操作程序

核心思想：假设未知函数 $y(x)$ 是一个无穷幂级数，将其逐项求导后代回原方程，利用“幂级数恒等于零，则各项系数必全为零”的代数性质，反向推导出各项系数的规律。

标准执行步骤：

Step 1. 设出解的形态：假设方程存在幂级数解 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ （默认在 $x = 0$ 处展开）。

Step 2. 逐项求导：在收敛区间内，对幂级数逐项求导，得到：

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Step 3. 代入方程并对齐指标（最易错的难点）：将 y, y', y'' 代入原方程。为了能把同类项合并，必须通过平移求和指标（例如令 $k = n - 1$ 或 $k = n - 2$ ），强行使所有求和符号内部的 x 具有完全相同的幂次（统换成 x^k ）。

Step 4. 统一求和下限：各个级数的起始指标 k 往往不同。需要把多出来的开头几项单独剥离出来，让所有级数都从同一个 k 值开始求和，进而合并为一个大的 $\sum$ 。

Step 5. 提取递推公式 (Recurrence Relation)：合并同类项后，令所有 x^k 的系数等于 0。这会产生一个关于 a_k 的通用递推公式。

Step 6. 求解系数与组装通解：利用递推公式，将所有的 a_k 归类表达为 a_0 和 a_1 的倍数。最后提取公因式，即可得到两个线性无关的基础解系。

例题 4.1: 幂级数解法的经典范例 求常微分方程 $y'' + xy' + y = 0$ 在 $x = 0$ 附近的幂级数通解。

解答. 第一步：设解并求导

设方程的解为 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 。求导得：

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \implies x y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

第二步：代入原方程并对齐指标

将上述级数代入原方程 $y'' + x y' + y = 0$ 中：

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

观察发现，后两项的 x 已经是 n 次方了，为了统一，我们把第一项的幂次也变成 k 次方。对第一项令 $k = n - 2 \implies n = k + 2$ 。当 $n = 2$ 时， $k = 0$ 。对后两项直接令 $n = k$ 。代换后得到：

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

第三步：统一求和下限并提取递推公式

注意到中间那项是从 $k = 1$ 开始的，我们大可不必将其单独剥离，因为当 $k = 0$ 时， $k a_k x^k = 0$ ，所以中间项其实也可以毫无影响地改写为从 $k = 0$ 开始求和！于是三个级数全都可以从 $k = 0$ 开始，直接合并：

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1) a_{k+2} + k a_k + a_k \right] x^k = 0$$

化简中括号内的式子：

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1) a_{k+2} + (k+1) a_k \right] x^k = 0$$

根据多项式恒等于零的性质，每一项的系数必须为 0：

$$(k+2)(k+1) a_{k+2} + (k+1) a_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

由于 $k \geq 0$ ，显然 $k+1 \neq 0$ ，两边约去 $(k+1)$ ，得到极其清爽的递推关系：

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{k+2}$$

第四步：分类推导系数规律

这个递推公式步长为 2，这意味着偶数项只与 a_0 有关，奇数项只与 a_1 有关。我们分开推导：

(1) 偶数项 (k 为偶数)：

$$\circ k = 0: a_2 = -\frac{a_0}{2}$$

$$\circ k = 2: a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2 \cdot 4}$$

$$\circ k = 4: a_6 = -\frac{a_4}{6} = -\frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6} = -\frac{a_0}{2^3 \cdot 3!}$$

$$\circ \text{一般规律: } a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^m \cdot m!} a_0$$

(2) 奇数项 (k 为奇数):

$$\circ k = 1: a_3 = -\frac{a_1}{3}$$

$$\circ k = 3: a_5 = -\frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3 \cdot 5}$$

$$\circ k = 5: a_7 = -\frac{a_5}{7} = -\frac{a_1}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$\circ \text{一般规律: } a_{2m+1} = \frac{(-1)^m}{(2m+1)!!} a_1 \quad (\text{注: } !! \text{ 表示双阶乘, 即奇数连乘})$$

第五步: 组装最终通解

将偶数项和奇数项分别提取 a_0 和 a_1 , 得到原微分方程的级数通解:

$$y(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^m m!} x^{2m} + a_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!!} x^{2m+1}$$

(这两个级数在整个实数轴上均收敛, 它们构成了方程的两个线性无关的基础解系。)

□