

级数部分真题

秦加俊

2026 年 6 月 20 日

1 总览：四年真题中的级数主线

知识 1.1: 级数章真题的五条主线

四年真题中，级数章的考察可以按照如下逻辑组织：

数项级数 $\rightarrow$ 绝对收敛与条件收敛 $\rightarrow$ 幂级数 $\rightarrow$ 函数项级数

具体来说，常见题型包括：

题型	核心方法
正项级数敛散性	比较判别、积分判别、根值判别、比值判别
交错级数与条件收敛	Leibniz 判别、Dirichlet 判别、绝对值级数比较
幂级数收敛域与和函数	求半径、检查端点、逐项求导/积分
函数项级数一致收敛	Weierstrass 判别法、递推估计

2 数项级数：正项级数的敛散性

真题 2.1: 2023：判断正项级数敛散性

判断下列级数的敛散性：

- (1) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n \ln \sqrt{n}}$;
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt[5]{n} + 1}{(\sqrt[4]{n} + n)(\sqrt[3]{n} + n)}$;
- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4 \cdot 3^n}{5^n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} \right)$.

解答. (1) 因为

$$\ln \sqrt{n} = \frac{1}{2} \ln n,$$

所以

$$\frac{2}{n \ln \sqrt{n}} = \frac{4}{n \ln n}.$$

而

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$$

发散, 故由积分判别法知

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n \ln \sqrt{n}}$$

发散。

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$3\sqrt[5]{n} + 1 \sim 3n^{1/5},$$

$$(\sqrt[4]{n} + n)(\sqrt[3]{n} + n) \sim n^2.$$

因此

$$\frac{3\sqrt[5]{n} + 1}{(\sqrt[4]{n} + n)(\sqrt[3]{n} + n)} \sim \frac{3}{n^{9/5}}.$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{9/5}}$$

收敛, 所以原级数收敛。

(3) 分成两部分:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^n}{5^n} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

为收敛的几何级数。又

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} = -\frac{2}{n(n+2)}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}\right)$$

绝对收敛。故原级数收敛。 □

真题 2.2: 2025: 根值判别与积分判别

讨论下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2};$$

$$(2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}.$$

解答. (1) 设

$$a_n = 2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}.$$

用根值判别法:

$$\sqrt[n]{a_n} = 2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{2}{e} < 1.$$

故级数收敛。

(2) 考虑

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

令

$$u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}.$$

则

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u}},$$

该积分发散。因此由积分判别法，

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

发散。

□

3 绝对收敛与条件收敛

真题 3.1: 2025: 交错结构下的条件收敛判别

判断下列级数是否收敛；若收敛，判断是条件收敛还是绝对收敛：

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1+\frac{1}{n}}}.$$

解答. (1) 对通项作渐近展开：

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

其中

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

由 Leibniz 判别法收敛，

$$\sum_{n=2}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

绝对收敛，但

$$-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

发散。因此原级数发散。

(2) 记

$$b_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}.$$

显然

$$b_n \rightarrow 0.$$

又函数

$$x^{1+\frac{1}{x}}$$

最终单调递增, 因此 b_n 最终单调递减。由 Leibniz 判别法,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

收敛。

另一方面,

$$n^{1/n} \rightarrow 1,$$

所以

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{n}.$$

因此绝对值级数发散。故原级数条件收敛。 □

真题 3.2: 2022: 带参数的交错级数

求函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x + 2n}$$

的收敛域、绝对收敛点 x 的全体、条件收敛点 x 的全体。

解答. 先看一般收敛性。对任意固定的 $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{n^x + 2n} \rightarrow 0.$$

并且当 n 足够大时,

$$n^x + 2n$$

关于 n 单调递增, 所以

$$\frac{1}{n^x + 2n}$$

最终单调递减。因此由 Leibniz 判别法, 原级数对所有 $x \in \mathbb{R}$ 收敛。

再看绝对收敛。若 $x > 1$, 则

$$n^x + 2n \sim n^x,$$

所以

$$\frac{1}{n^x + 2n} \sim \frac{1}{n^x}.$$

因此绝对收敛。

若 $x = 1$, 则

$$\frac{1}{n^x + 2n} = \frac{1}{3n},$$

绝对值级数发散。

若 $x < 1$, 则

$$n^x + 2n \sim 2n,$$

所以绝对值级数与调和级数同敛散, 也发散。

综上:

收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

绝对收敛点全体为 $(1, +\infty)$.

条件收敛点全体为 $(-\infty, 1]$.

□

真题 3.3: 2023: 含 $\sin^n x$ 的级数

讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{1 + \sin^{2n} x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

的绝对收敛性和条件收敛性。

解答. 记

$$u_n(x) = \frac{\sin^n x}{1 + \sin^{2n} x}.$$

若

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

则 $\sin x = \pm 1$, 从而

$$u_n(x) = \frac{(\pm 1)^n}{2},$$

通项不趋于 0, 所以级数发散。

若

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},$$

则

$$|\sin x| < 1.$$

此时

$$|u_n(x)| \leq |\sin x|^n.$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sin x|^n$$

收敛, 故原级数绝对收敛。

因此:

$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时发散,
 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时绝对收敛.

没有条件收敛点。

□

真题 3.4: 2024: Dirichlet 判别法

判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n + \frac{1}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

的敛散性。

解答. 记

$$b_n = \frac{1}{n + \frac{1}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

则

$$b_n \sim \frac{e}{n},$$

所以 $b_n \rightarrow 0$, 并且 b_n 最终单调递减。另一方面, 由于 $2 \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=1}^N \sin(2n)$$

的部分和有界。由 Dirichlet 判别法,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n)$$

收敛。

但

$$|b_n \sin(2n)| \sim \frac{e|\sin(2n)|}{n}.$$

由于 $\sum |\sin(2n)|/n$ 发散, 原级数不绝对收敛。

因此原级数

条件收敛。

□

4 幂级数: 收敛域与和函数**真题 4.1: 2024: 稀疏幂级数的收敛域**

求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{10^n}$$

的收敛域。

解答. 考虑通项

$$a_n(x) = \frac{x^{n^3}}{10^n}.$$

用根值判别法:

$$\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \frac{|x|^{n^2}}{10}.$$

若 $|x| < 1$, 则

$$\frac{|x|^{n^2}}{10} \rightarrow 0,$$

级数收敛。

若 $|x| > 1$, 则

$$\frac{|x|^{n^2}}{10} \rightarrow +\infty,$$

级数发散。

若 $|x| = 1$, 则

$$\frac{x^{n^3}}{10^n}$$

的绝对值为 10^{-n} , 故收敛。

因此收敛域为

$$[-1, 1].$$

□

真题 4.2: 2024: 幂级数展开

在 $(-1, 1)$ 上展开函数

$$\arctan x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

为幂级数。

解答. 在 $(-1, 1)$ 上,

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

又

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

相加得

$$\arctan x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

当 n 为奇数时系数为 0, 当 $n = 2k$ 时系数为 2。因此

$$\arctan x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{4k+1}, \quad |x| < 1.$$

□

真题 4.3: 2023: 幂级数的收敛域与和函数

求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$$

的收敛半径、收敛域和和函数。

解答. 设

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1,$$

所以收敛半径为

$$R = 1.$$

端点处:

$$x = 1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

由 Leibniz 判别法收敛;

$$x = -1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

发散. 因此收敛域为

$$(-1, 1].$$

令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n.$$

在 $(-1, 1)$ 内逐项求导:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = -\frac{1}{1+x}.$$

又 $f(0) = 0$, 所以

$$f(x) = - \int_0^x \frac{dt}{1+t} = -\ln(1+x).$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = -\ln(1+x), \quad x \in (-1, 1].$$

□

真题 4.4: 2023: Taylor 展开与高阶导数

求函数

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$$

于 $x = 1$ 处的 Taylor 展开式, 并计算

$$f^{(2022)}(1), \quad f^{(2023)}(1).$$

解答. 注意

$$x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4.$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x-1)^2-4} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

因此

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^{n+1}}, \quad |x-1| < 2.$$

于是

$$a_{2022} = -\frac{1}{4^{1012}},$$

所以

$$\frac{f^{(2022)}(1)}{2022!} = -\frac{1}{4^{1012}},$$

即

$$f^{(2022)}(1) = -\frac{2022!}{4^{1012}}.$$

由于展开式中没有奇次幂项,

$$f^{(2023)}(1) = 0.$$

□

真题 4.5: 2022: 几何级数求导

求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$$

的收敛区间, 以及此幂级数的和函数。

解答. 由

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^2}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

两边求二阶导数, 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)''.$$

直接计算得

$$\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1.$$

端点 $x = \pm 1$ 时通项不趋于 0, 故收敛区间为

$$(-1, 1).$$

□

真题 4.6: 2025: 幂级数的和函数

求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} x^{2n+1}$$

的收敛半径、收敛区间、收敛域及和函数。

解答. 由于

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \sim \frac{1}{4n^2},$$

幂次为 $2n+1$, 故收敛半径为

$$R = 1.$$

当 $x = \pm 1$ 时, 级数的绝对值通项为

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$$

其级数收敛。因此收敛域为

$$[-1, 1].$$

令

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} x^{2n+1}.$$

在 $(-1, 1)$ 内逐项求导:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \\ &= x \arctan x. \end{aligned}$$

又

$$S(0) = 0.$$

所以

$$S(x) = \int_0^x t \arctan t \, dt.$$

分部积分得

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x. \end{aligned}$$

因此

$$S(x) = \frac{1+x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2}, \quad x \in [-1, 1].$$

□

5 函数项级数：一致收敛

真题 5.1: 2022: Weierstrass 判别法

任意给定常数 $r > 0$, 证明函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx}$$

在 $[r, +\infty)$ 上一致收敛。

解答. 当 $x \in [r, +\infty)$ 时,

$$0 \leq n^2 e^{-nx} \leq n^2 e^{-nr}.$$

考虑数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nr}.$$

由比值判别法,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 e^{-(n+1)r}}{n^2 e^{-nr}} = e^{-r} < 1.$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nr}$$

收敛。由 Weierstrass 判别法,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx}$$

在 $[r, +\infty)$ 上一致收敛。 □

真题 5.2: 2023: 函数序列的一致收敛性

讨论函数序列

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

在

$$x \in (0, +\infty)$$

上的一致收敛性。

解答. 对任意固定的 $x \in (0, +\infty)$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x^2} = 1.$$

因此极限函数为

$$f(x) \equiv 1, \quad x \in (0, +\infty).$$

下面证明它不是一致收敛。取

$$x_n = n^{1/4}.$$

则

$$x_n^2 = \sqrt{n}.$$

于是

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x_n)| &= \left| \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} - 1 \right| \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

而

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \longrightarrow e^{-1}.$$

所以

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \longrightarrow 1 - e^{-1} \neq 0.$$

因此

$$\sup_{x \in (0, +\infty)} |f_n(x) - f(x)|$$

不可能趋于 0。故函数序列

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x^2}$$

在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛。

$f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上逐点收敛到 1, 但不一致收敛。

□

真题 5.3: 2024: 递推定义的函数项级数

对于每个 $x \in [0, 1]$, 定义

$$f_1(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^4} dt, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt.$$

证明函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛。

解答. 当 $0 \leq t \leq 1$ 时,

$$\sqrt{1+t^4} \leq \sqrt{2}.$$

所以

$$0 \leq f_1(x) \leq \sqrt{2}x.$$

下面用归纳法证明

$$0 \leq f_n(x) \leq \sqrt{2} \frac{x^n}{n!}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

当 $n=1$ 已证。若结论对 n 成立, 则

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt \leq \sqrt{2} \int_0^x \frac{t^n}{n!} dt = \sqrt{2} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

归纳成立。

于是

$$|f_n(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{n!}, \quad x \in [0, 1].$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{n!}$$

收敛, 故由 Weierstrass 判别法,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛。 □

真题 5.4: 2024: 积分号内先求和与逐项积分

设 E 为实数。

(a) 求所有实数 E , 使得

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ex)^n}{n!} e^{-x} dx$$

收敛。

(b) 求所有实数 E , 使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(Ex)^n}{n!} e^{-x} dx$$

收敛。

解答. (a) 先在积分号内求和:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ex)^n}{n!} = e^{Ex}.$$

因此

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ex)^n}{n!} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{(E-1)x} dx.$$

该积分收敛当且仅当

$$E < 1.$$

(b) 先逐项积分:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{(Ex)^n}{n!} e^{-x} dx &= \frac{E^n}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \\ &= \frac{E^n}{n!} \Gamma(n+1) \\ &= E^n. \end{aligned}$$

所以原式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} E^n,$$

收敛当且仅当

$$|E| < 1.$$

综上:

$$\boxed{(a) E < 1,} \quad \boxed{(b) |E| < 1.}$$

□

真题 5.5: 2024: 级数与积分的层蛋糕公式

设级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

收敛, 每项 $a_n > 0$, T 是序列 $\{a_n\}$ 中最大项。对于每个实数 $x > 0$, 定义

$$L(x) = \#\{n : a_n > x\}.$$

(a) 证明 0 是 $L(x)$ 的瑕点。

(b) 证明瑕积分

$$\int_0^T L(x) dx$$

收敛, 并且

$$\int_0^T L(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

解答. 由于

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

收敛且 $a_n > 0$, 所以

$$a_n \rightarrow 0.$$

因此对任意 $x > 0$, 满足 $a_n > x$ 的项只有有限多个, 所以 $L(x)$ 在 $(0, T]$ 上有限. 但当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $L(x)$ 可能趋于无穷, 因此 0 是瑕点.

注意

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0 < x < a_n\}}.$$

由 Tonelli 定理,

$$\begin{aligned} \int_0^T L(x) dx &= \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0 < x < a_n\}} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T \mathbf{1}_{\{0 < x < a_n\}} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

右端收敛, 因此左端瑕积分收敛, 且

$$\boxed{\int_0^T L(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.}$$

□

6 补充: 关于含有绝对值的幂级数展开

真题 6.1: 2022: 含 $\sqrt{|x|}$ 的展开

求函数

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{|x|}}{1 - \sqrt{|x|}}$$

在 $x = 0$ 处的展开式, 并指出收敛域。

解答. 令

$$u = |x|.$$

当 $|x| < 1$ 时, 即 $0 \leq u < 1$, 有

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{u}}{1 - \sqrt{u}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{k+\frac{1}{2}}}{2k+1}.$$

因此

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{k+\frac{1}{2}}}{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$

即

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{k+1}}{2k+1}, \quad |x| < 1.$$

需要注意：由于函数含有 $|x|$ ，严格来说它不是通常意义下关于 x 的双侧幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

的展开；它更自然地应理解为关于非负变量 $u = |x|$ 的幂级数展开。

□

7 总结：做级数题的顺序感

知识 7.1: 级数题的解题雷达

遇到级数题时，可以按照如下顺序判断：

(1) 先看通项是否趋于 0。

$$a_n \not\rightarrow 0 \implies \sum a_n \text{ 发散.}$$

(2) 若是正项级数，优先比较。

$$a_n \sim b_n, \quad \sum b_n \text{ 已知,}$$

则用比较判别或极限比较判别。

(3) 若含有指数、阶乘、幂次，考虑比值或根值。

$$\sqrt[n]{a_n}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(4) 若有 $(-1)^n$ 或 $\sin n\theta$ ，考虑交错级数、Dirichlet 判别或 Abel 判别。

(5) 若是幂级数，三步走：

$$\text{求半径} \rightarrow \text{查端点} \rightarrow \text{求和函数.}$$