

广义积分和含参变量积分

秦加俊

2026 年 6 月 20 日

广义积分与含参变量积分历年真题特训

【命题通览】 广义积分与含参变量积分部分的真题非常讲究“方法识别”。题目表面形式差别很大，但核心套路大致可以归纳为四类：

端点奇性看比较，振荡积分看 Dirichlet/Abel，含参积分看一致收敛，计算型看求导或换元。

知识 0.1: 积分类真题路线图

题型	典型对象	优先方法
Gamma/Beta 型积分	$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx, \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$	直接识别 Gamma 函数、Beta 函数。
端点奇性型瑕积分	0、1、 $+\infty$ 或无穷多个点处有奇性	分段比较。核心是局部等价： $\sin x \sim x, \sin x \sim x - k\pi$ 。
振荡无穷积分	$\int_0^\infty f(x) \sin x dx, \int_0^\infty f(x) \cos \theta(x) dx$	Dirichlet 判别法、Abel 判别法、换元后再判别。
含参变量积分	$\int f(x, t) dx$	先证明一致收敛，再讨论连续、求导、积分号下求导。
求和与积分交换	$\int \sum u_n(x) dx$ 或 $\sum \int u_n(x) dx$	先问能不能交换；若能直接求和或逐项积分。

这部分不要急着算，先判断：是奇性、振荡、含参，还是交换次序。

1 积分可积性判断

1.1 Gamma 函数与 Beta 函数型广义积分

知识 1.1: Gamma 函数与 Beta 函数速查表

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0.$$

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0, q > 0.$$

二者关系为

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

常用值:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4},$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}.$$

例题 1.1: Gamma 与 Beta 函数基础计算 (2022 年真题) 计算

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x^3} e^{-x} dx, \quad \int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} dx.$$

解答. 第一题中

$$\sqrt{x^3} = x^{3/2}.$$

因此

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x^3} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{3/2} e^{-x} dx = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right).$$

所以

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \sqrt{x^3} e^{-x} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.}$$

第二题中

$$\sqrt{\frac{x^3}{1-x}} = x^{3/2} (1-x)^{-1/2}.$$

将其写成 Beta 函数标准形式:

$$x^{3/2} = x^{5/2-1}, \quad (1-x)^{-1/2} = (1-x)^{1/2-1}.$$

所以

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} dx = B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

由

$$B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3)}$$

得到

$$B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \cdot \sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\pi}{8}.$$

因此

$$\boxed{\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} dx = \frac{3\pi}{8}.}$$

□

例题 1.2: Beta 函数计算瑕积分 (2024 年真题) 计算

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^5}{1-x}} dx.$$

解答. 先化为标准 Beta 函数形式:

$$\sqrt{\frac{x^5}{1-x}} = x^{5/2}(1-x)^{-1/2}.$$

注意

$$x^{5/2} = x^{7/2-1}, \quad (1-x)^{-1/2} = (1-x)^{1/2-1}.$$

因此

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^5}{1-x}} dx = B\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

由 Beta-Gamma 关系,

$$B\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{7}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(4)}.$$

而

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(4) = 3! = 6.$$

所以

$$B\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{15\sqrt{\pi}}{8} \cdot \sqrt{\pi}}{6} = \frac{15\pi}{48} = \frac{5\pi}{16}.$$

因此

$$\boxed{\int_0^1 \sqrt{\frac{x^5}{1-x}} dx = \frac{5\pi}{16}.}$$

□

1.2 振荡型广义积分

知识 1.2: 振荡积分的两个基本判别思路

振荡型无穷积分最常用两种判别法:

方法	适用场景
Dirichlet 判别法	若 $\left \int_a^A \sin x \, dx \right \quad \text{或} \quad \left \int_a^A \cos x \, dx \right $ 一致有界, 且 $g(x)$ 单调趋于 0, 则 $\int_a^\infty g(x) \sin x \, dx$ 收敛。
Abel 判别法	若 $\int_a^\infty g(x) \sin x \, dx$ 已经收敛, 而 $h(x)$ 单调有界, 则 $\int_a^\infty g(x) h(x) \sin x \, dx$ 收敛。

Dirichlet 负责“振荡配趋零”, Abel 负责“已收敛配稳定扰动”。

例题 1.3: Dirichlet 与 Abel 判别法处理无穷积分 (2023 年真题) 讨论无穷积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \arctan x \, dx$$

的敛散性。

解答. 先考虑

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx.$$

因为

$$\frac{1}{\sqrt{x}}$$

在 $[1, +\infty)$ 上单调下降并趋于 0, 且

$$\left| \int_1^A \sin x \, dx \right| = |\cos 1 - \cos A| \leq 2,$$

所以由 Dirichlet 判别法,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx$$

收敛。

再看额外因子

$$\arctan x.$$

它在 $[1, +\infty)$ 上单调递增且有界:

$$0 < \arctan x < \frac{\pi}{2}.$$

因此由 Abel 判别法,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \arctan x \, dx$$

收敛。

注意它不是绝对收敛。因为

$$\arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

而

$$\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} \, dx$$

发散, 所以原积分为条件收敛型振荡积分。

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \arctan x \, dx \text{ 收敛, 但不是绝对收敛。}$$

□

例题 1.4: 换元后使用 **Dirichlet** 判别法 (2022 年真题) 设

$$\theta(x) = \int_0^x \sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)} \, dt.$$

证明广义积分

$$\int_0^{+\infty} \cos(\theta(x)) \, dx$$

收敛。

解答. 首先

$$\theta'(x) = \sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)} > 0.$$

所以 θ 在 $[0, +\infty)$ 上严格递增。

又因为

$$\theta(x) = \int_0^x \sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)} dt \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty),$$

所以 θ 将 $[0, +\infty)$ 一一映到 $[0, +\infty)$ 。

记其反函数为

$$x = s(u).$$

令

$$u = \theta(x),$$

则

$$dx = s'(u) du.$$

于是原积分化为

$$\int_0^{+\infty} \cos(\theta(x)) dx = \int_0^{+\infty} \cos u \cdot s'(u) du.$$

由反函数求导公式,

$$s'(u) = \frac{1}{\theta'(s(u))} = \frac{1}{\sqrt{(s(u)+1)(s(u)+2)(s(u)+3)}}.$$

因为 $s(u)$ 单调递增且

$$s(u) \rightarrow +\infty \quad (u \rightarrow +\infty),$$

所以

$$s'(u) > 0, \quad s'(u) \rightarrow 0.$$

并且由于分母

$$\sqrt{(s(u)+1)(s(u)+2)(s(u)+3)}$$

随 u 增大而增大, 因此 $s'(u)$ 单调递减。

另一方面,

$$\left| \int_0^A \cos u du \right| = |\sin A| \leq 1.$$

于是 $\cos u$ 的原函数有界, 而 $s'(u)$ 单调趋于 0。由 Dirichlet 判别法,

$$\int_0^{+\infty} \cos u \cdot s'(u) du$$

收敛。

因此

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \cos(\theta(x)) dx \text{ 收敛。}}$$

方法总结: 这题的关键不是直接估计 $\cos(\theta(x))$, 而是利用

$$u = \theta(x)$$

把相位变成标准振荡项 $\cos u$ 。换元后多出来的因子

$$s'(u) = \frac{1}{\sqrt{(s(u)+1)(s(u)+2)(s(u)+3)}}$$

正好单调趋于 0, 于是可以直接套 Dirichlet 判别法。

□

1.3 端点奇性与无穷多个奇点

例题 1.5: 含无穷多个瑕点的广义积分 (2025 年真题) 判断广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(\sin^2 x)^\alpha} \quad \left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\right)$$

的敛散性。

解答. 本题的关键是：被积函数在所有

$$x = k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

处都有奇性，因此不能只看 0 或 $+\infty$ ，而要同时处理无穷多个瑕点。

先看 $x = 0$ 附近。由于

$$\sin x \sim x, \quad x \rightarrow 0,$$

所以

$$(\sin^2 x)^\alpha \sim x^{2\alpha}.$$

又

$$1 + x^2 \sim 1,$$

因此被积函数在 0 附近等价于

$$\frac{1}{x^{2\alpha}}.$$

因为

$$0 < \alpha < \frac{1}{2},$$

所以

$$2\alpha < 1,$$

从而

$$\int_0^\delta \frac{dx}{x^{2\alpha}}$$

收敛。因此 $x = 0$ 附近的瑕积分收敛。

下面考虑 $x = k\pi$ 附近，其中 $k \geq 1$ 。当 $x \rightarrow k\pi$ 时，

$$\sin x \sim (-1)^k(x - k\pi),$$

所以

$$(\sin^2 x)^\alpha \sim |x - k\pi|^{2\alpha}.$$

同时

$$1 + x^2 \sim 1 + (k\pi)^2 \sim Ck^2.$$

因此在 $x = k\pi$ 附近，被积函数的主要形式为

$$\frac{C}{k^2|x - k\pi|^{2\alpha}}.$$

由于

$$2\alpha < 1,$$

所以每一个局部瑕积分

$$\int_{k\pi-\delta}^{k\pi+\delta} \frac{dx}{|x-k\pi|^{2\alpha}}$$

都收敛。

还要注意：虽然每个瑕点附近都局部收敛，但瑕点有无穷多个，所以还必须检查这些局部贡献加起来是否收敛。

对每个 $k \geq 1$ ，考虑区间

$$[k\pi, (k+1)\pi].$$

在该区间上，有

$$1+x^2 \geq Ck^2.$$

并且

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{|\sin x|^{2\alpha}} = \int_0^\pi \frac{du}{(\sin u)^{2\alpha}}.$$

由于 $0 < 2\alpha < 1$ ，积分

$$\int_0^\pi \frac{du}{(\sin u)^{2\alpha}}$$

收敛。

因此存在常数 $C > 0$ ，使得

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{(1+x^2)(\sin^2 x)^\alpha} \leq \frac{C}{k^2}.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{(1+x^2)(\sin^2 x)^\alpha} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

右端收敛，所以从远处所有区间累加起来也收敛。

综上，

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(\sin^2 x)^\alpha} \text{ 收敛。}}$$

方法总结：这类题的核心不是简单看无穷远，而是要识别出无穷多个瑕点：

$$x = k\pi.$$

每个瑕点附近用

$$\sin x \sim x - k\pi$$

判断局部可积性；再利用

$$1+x^2 \sim k^2$$

把每个周期区间的贡献压成

$$\frac{C}{k^2},$$

最后用 $\sum 1/k^2$ 收敛完成整体控制。

□

2 一致收敛与分析运算的交换性

2.1 含参变量积分的一致收敛

知识 2.1: 含参变量广义积分的一致收敛判定套路

设

$$I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx.$$

判断其关于 $t \in E$ 是否一致收敛，常用如下方法：

方法	使用场景
Weierstrass 判别法	若 $ f(x, t) \leq M(x), \quad \int_a^{\infty} M(x) dx < \infty,$ 则一致收敛。
一致 Dirichlet 判别法	振荡部分的原函数关于参数一致有界，另一因子关于 x 单调趋于 0。
一致 Abel 判别法	已知一个积分一致收敛，再乘上关于 x 单调且关于参数一致有界的因子。
尾积分准则	直接估计 $\sup_{t \in E} \left \int_A^{\infty} f(x, t) dx \right \rightarrow 0.$ 这是判断“不一致收敛”或精确证明一致收敛的硬办法。

例题 2.1: 含参无穷积分的一致收敛 (2025 年真题) 讨论含参无穷积分

$$\int_1^{+\infty} t e^{-tx} \frac{\cos x}{x} dx$$

在参数区间

$$0 \leq t < +\infty$$

上的一致收敛性。

解答. 本题的关键是注意到积分下限是 1，因此不需要处理 $x = 0$ 附近的奇性，只需要控制无穷

远处的尾部。

对任意 $x \geq 1$ 与 $t \geq 0$, 有

$$\left| te^{-tx} \frac{\cos x}{x} \right| \leq \frac{te^{-tx}}{x}.$$

下面对右端关于 t 取最大值。固定 $x \geq 1$, 考虑函数

$$\varphi(t) = te^{-tx}, \quad t \geq 0.$$

求导得

$$\varphi'(t) = e^{-tx}(1 - tx).$$

所以最大值在

$$t = \frac{1}{x}$$

处取得, 并且

$$\max_{t \geq 0} te^{-tx} = \frac{1}{x} e^{-1}.$$

因此

$$\left| te^{-tx} \frac{\cos x}{x} \right| \leq \frac{1}{ex^2}.$$

而

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{ex^2} = \frac{1}{e}$$

收敛。

由 Weierstrass 判别法, 含参无穷积分

$$\int_1^{+\infty} te^{-tx} \frac{\cos x}{x} dx$$

在

$$0 \leq t < +\infty$$

上一致收敛。

$$\int_1^{+\infty} te^{-tx} \frac{\cos x}{x} dx \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上一致收敛。}$$

方法总结: 这题不用 Dirichlet, 也不用 Abel。因为参数 t 和指数衰减 e^{-tx} 结合后, 有统一估计

$$\sup_{t \geq 0} te^{-tx} = \frac{1}{ex}.$$

于是整个被积函数被压成

$$\frac{1}{ex^2},$$

直接用一致 Weierstrass 判别法即可。

□

2.2 参数求导法计算积分

知识 2.2: 正常含参定积分中的交换顺序

正常含参定积分通常指

$$F(t) = \int_a^b f(x, t) dx,$$

其中积分区间 $[a, b]$ 有限, 且被积函数没有瑕点。这类问题主要依靠连续性来保证交换顺序。

交换类型	典型形式	常用充分条件
极限与积分交换	设 $F(t) = \int_a^b f(x, t) dx.$ 希望有 $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = \int_a^b \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) dx.$	若 $f(x, t)$ 在矩形区域 $[a, b] \times I$ 上连续, 且 $t_0 \in I$, 则 $F(t) = \int_a^b f(x, t) dx$ 在 t_0 处连续, 因此可交换极限与积分。 有限区间上, 连续性通常足够。
求导与积分交换	设 $F(t) = \int_a^b f(x, t) dx.$ 希望有 $F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$	若 $f(x, t)$ 以及 $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ 在矩形区域 $[a, b] \times I$ 上连续, 则 $F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$ 有限区间上, 求导看偏导连续。
积分与积分交换	设 $G(t) = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt.$ 希望有 $\int_\alpha^\beta \int_a^b f(x, t) dx dt = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(x, t) dt dx.$	若 $f(x, t)$ 在矩形区域 $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ 上连续, 则二重积分可以交换次序: $\int_\alpha^\beta \int_a^b f(x, t) dx dt = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(x, t) dt dx.$ 矩形区域上连续, 可交换积分次序。

因此, 正常含参定积分可以记成:

正常定积分: 区间有限、无瑕点, 主要看连续性。

知识 2.3: 含参广义积分中的交换顺序

含参广义积分通常有两类困难：一类是积分区间无穷，例如

$$F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx;$$

另一类是积分区间有限但存在瑕点，例如

$$F(t) = \int_0^1 f(x, t) dx,$$

其中 $x = 0$ 是瑕点。此时仅有局部连续性不够，还必须检查无穷远处或瑕点附近的一致收敛。

交换类型	典型形式	常用充分条件
极限与广义积分交换	设 $F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx.$ 希望有 $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = \int_a^{+\infty} \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) dx.$	若对每个有限 $A > a$, $f(x, t)$ 在 $[a, A] \times E$ 上关于 t 连续, 并且 $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ 关于 $t \in E$ 一致收敛, 则 $F(t)$ 在 E 上连续。 广义积分要检查尾部一致收敛。
求导与广义积分交换	设 $F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx.$ 希望有 $F'(t) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$	若 $\int_a^{+\infty} f(x, t_0) dx$ 在某一点 $t_0 \in E$ 收敛, 且 f 对 t 可导, 并且 $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$ 关于 $t \in E$ 一致收敛, 则可在积分号下求导: $F'(t) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$ 积分号下求导, 看导函数积分一致收敛。

实际做题中, 广义积分的一致收敛常用两种方法:

$$|f(x, t)| \leq M(x), \quad \int_a^{+\infty} M(x) dx < +\infty$$

则由 Weierstrass 判别法可得一致收敛。

若找不到统一控制函数，则直接估计尾积分：

$$\sup_{t \in E} \left| \int_A^{+\infty} f(x, t) dx \right| \rightarrow 0 \quad (A \rightarrow +\infty).$$

因此，含参广义积分可以记成：

广义积分：局部看连续性，整体看尾部或瑕点的一致控制。

例如

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x dx = \frac{1}{1+t^2}, \quad t > 0.$$

虽然每个 $t > 0$ 时积分都收敛，但当 $t \rightarrow 0^+$ 时，指数衰减在无穷远处逐渐失效。若直接令 $t = 0$ ，则得到

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx,$$

它作为普通广义积分并不收敛。这说明广义积分中交换极限和积分时，真正危险的地方往往是

无穷远处或瑕点附近的尾部失控。

例题 2.2: 含参无穷积分的一致收敛与显式计算 (2022 年真题) 设 n 为正整数。讨论

$$J_n(t) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(t+x^2)^n}$$

在 $t \in [a, +\infty)$ 上的一致收敛性，其中 $a > 0$ ，并求 $J_n(t)$ 。

解答. 先证明一致收敛。固定 $a > 0$ ，当 $t \geq a$ 时，

$$0 \leq \frac{1}{(t+x^2)^n} \leq \frac{1}{(a+x^2)^n}.$$

而

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^n}$$

收敛。事实上， $x \rightarrow +\infty$ 时

$$\frac{1}{(a+x^2)^n} \sim \frac{1}{x^{2n}},$$

且 $2n > 1$ 。因此由 Weierstrass 判别法， $J_n(t)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致收敛。

下面计算 $J_n(t)$ 。

先算

$$J_1(t) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{t+x^2}.$$

令

$$x = \sqrt{t} u,$$

则

$$dx = \sqrt{t} du,$$

所以

$$J_1(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t} du}{t(1+u^2)} = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{t}}.$$

对 $n \geq 1$, 在任意闭区间 $t \in [a, b] \subset (0, +\infty)$ 上, 可在积分号下求导:

$$J'_n(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{(t+x^2)^n} \right) dx = -n \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(t+x^2)^{n+1}}.$$

因此

$$J_{n+1}(t) = -\frac{1}{n} J'_n(t).$$

由

$$J_1(t) = \frac{\pi}{2} t^{-1/2}$$

递推可得

$$J_n(t) = \frac{\pi}{2^n} \frac{(2n-3)!!}{(n-1)!} \frac{1}{t^{n-\frac{1}{2}}}, \quad n \geq 1.$$

其中约定 $(-1)!! = 1$ 。

因此

$$J_n(t) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(t+x^2)^n} = \frac{\pi(2n-3)!!}{2^n(n-1)!} \frac{1}{t^{n-\frac{1}{2}}}.$$

□

例题 2.3: Dirichlet 积分的含参计算 (2023 年真题) 设

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx.$$

证明:

- (1) $I(t)$ 关于 $t \in [0, +\infty)$ 一致收敛;
- (2) $I(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导;
- (3) 求 $I(t)$, 并计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

解答. 先证明一致收敛。已知

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

收敛。并且对任意 $t \geq 0$,

$$e^{-tx}$$

关于 x 单调递减, 且

$$0 \leq e^{-tx} \leq 1.$$

因此由一致 Abel 判别法,

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$$

关于 $t \in [0, +\infty)$ 一致收敛。

下面证明可导。任取闭区间

$$[c, d] \subset (0, +\infty).$$

对

$$f(x, t) = e^{-tx} \frac{\sin x}{x}$$

有

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = -e^{-tx} \sin x.$$

并且当 $t \in [c, d]$ 时,

$$|e^{-tx} \sin x| \leq e^{-cx}.$$

由于

$$\int_0^{+\infty} e^{-cx} dx$$

收敛, 所以导函数积分在 $[c, d]$ 上一致收敛。因此可在积分号下求导:

$$I'(t) = - \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x dx.$$

计算

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x dx = \frac{1}{1+t^2}, \quad t > 0.$$

所以

$$I'(t) = -\frac{1}{1+t^2}.$$

积分得

$$I(t) = -\arctan t + C.$$

又因为

$$|I(t)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dx = \frac{1}{t}, \quad t > 0,$$

所以

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0.$$

于是

$$0 = -\frac{\pi}{2} + C,$$

即

$$C = \frac{\pi}{2}.$$

因此

$$I(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t, \quad t > 0.$$

由一致收敛可知 $I(t)$ 在 $t = 0$ 处右连续, 因此

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} I(t) = \frac{\pi}{2}.$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

□

例题 2.4: Gaussian 含参积分与微分方程法 (2024 年真题) 设 b 为实数。

(a) 证明含参变量无穷积分

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \cos(2bx) dx$$

在 $b \in (-\infty, +\infty)$ 上一致收敛。

(b) 证明

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2bx) dx = e^{-b^2} \int_0^b e^{-t^2} dt.$$

解答. (a) 因为对任意 $b \in \mathbb{R}$,

$$\left| x e^{-x^2} \cos(2bx) \right| \leq x e^{-x^2}.$$

而

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$$

收敛, 所以由 Weierstrass 判别法,

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \cos(2bx) dx$$

在 $b \in \mathbb{R}$ 上一致收敛。

(b) 记

$$F(b) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2bx) dx.$$

下面证明并计算 $F(b)$ 。

先说明可以在积分号下求导。对任意有限闭区间 $b \in [-B, B]$, 有

$$\left| \frac{\partial}{\partial b} (e^{-x^2} \sin(2bx)) \right| = \left| 2x e^{-x^2} \cos(2bx) \right| \leq 2x e^{-x^2}.$$

由于

$$\int_0^{+\infty} 2x e^{-x^2} dx = 1$$

收敛, 所以可在积分号下求导, 得到

$$F'(b) = \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} \cos(2bx) dx.$$

下面对右端积分作分部积分. 注意

$$\frac{d}{dx} (e^{-x^2} \cos(2bx)) = -2xe^{-x^2} \cos(2bx) - 2be^{-x^2} \sin(2bx).$$

因此

$$2xe^{-x^2} \cos(2bx) = -\frac{d}{dx} (e^{-x^2} \cos(2bx)) - 2be^{-x^2} \sin(2bx).$$

积分得

$$F'(b) = -\left[e^{-x^2} \cos(2bx)\right]_0^{+\infty} - 2bF(b).$$

由于

$$\left[e^{-x^2} \cos(2bx)\right]_0^{+\infty} = 0 - 1 = -1,$$

所以

$$F'(b) = 1 - 2bF(b).$$

于是

$$F'(b) + 2bF(b) = 1.$$

乘以积分因子 e^{b^2} :

$$(e^{b^2} F(b))' = e^{b^2}.$$

又

$$F(0) = 0,$$

故

$$e^{b^2} F(b) = \int_0^b e^{t^2} dt.$$

因此

$$F(b) = e^{-b^2} \int_0^b e^{t^2} dt.$$

也就是说,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2bx) dx = e^{-b^2} \int_0^b e^{t^2} dt.$$

□

例题 2.5: 对数积分的参数求导法 (2025 年真题) 求

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + \cos^2 x) dx, \quad a \neq 0.$$

解答. 因为被积函数只含有 a^2 , 所以结果只与 $|a|$ 有关。令

$$b = |a| > 0,$$

考虑

$$F(b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(b^2 \sin^2 x + \cos^2 x) dx.$$

对 b 求导:

$$F'(b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2b \sin^2 x}{b^2 \sin^2 x + \cos^2 x} dx.$$

令

$$u = \tan x, \quad dx = \frac{du}{1+u^2}.$$

则

$$\sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}.$$

于是

$$F'(b) = \int_0^{+\infty} \frac{2bu^2}{(1+u^2)(1+b^2u^2)} du.$$

使用分解

$$\frac{2bu^2}{(1+u^2)(1+b^2u^2)} = \frac{2b}{b^2-1} \left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+b^2u^2} \right)$$

可得

$$F'(b) = \frac{2b}{b^2-1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2b} \right) = \frac{\pi}{b+1}.$$

上式在 $b=1$ 处也由连续性成立。

因此

$$F(b) = \pi \ln(b+1) + C.$$

由

$$F(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 1 dx = 0$$

得到

$$0 = \pi \ln 2 + C,$$

所以

$$C = -\pi \ln 2.$$

故

$$F(b) = \pi \ln \frac{b+1}{2}.$$

回到 $b = |a|$, 得到

$$\boxed{I(a) = \pi \ln \frac{1+|a|}{2}}.$$

□

2.3 求和与积分交换

知识 2.4: 积分与无穷级数交换的条件

设

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

是定义在区间 E 上的函数项级数。一般来说,

$$\int_E \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) dx$$

和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_E u_n(x) dx$$

不一定相等。若想交换积分与无穷求和, 需要额外条件。

常用的充分条件如下:

方法	典型条件	结论
一致收敛型	若 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在有限区间 $[a, b]$ 上一致收敛, 且每个 u_n 可积。	则可以逐项积分: $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$
Weierstrass 控制型	若存在常数列 M_n , 使得 $ u_n(x) \leq M_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} M_n < +\infty.$	则 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 一致绝对收敛, 因此可以逐项积分。
绝对可积型	若 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_E u_n(x) dx < +\infty.$	则积分与求和可以交换: $\int_E \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_E u_n(x) dx.$ 这是无穷区间上最常用、最稳的条件。
非负项型	若 $u_n(x) \geq 0.$	即使结果可能为 $+\infty$, 也有 $\int_E \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_E u_n(x) dx.$ 若一边有限, 则另一边也有限且相等。

因此, 遇到

$$\int \sum \quad \text{和} \quad \sum \int$$

时,不能默认二者相等。应先检查能否逐项积分,尤其在无穷区间上,要特别注意是否满足

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_E |u_n(x)| dx < +\infty.$$

积分与无穷求和交换,本质上需要统一控制或绝对可积控制。

例题 2.6: 积分号内先求和与逐项积分的区别 (2024 年真题) 设 E 为实数。

(a) 求所有实数 E , 使得

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ex)^n}{n!} e^{-x} dx$$

收敛。

(b) 求所有实数 E , 使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(Ex)^n}{n!} e^{-x} dx$$

收敛。

解答. (a) 先在积分号内求和:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ex)^n}{n!} = e^{Ex}.$$

因此

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ex)^n}{n!} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{Ex} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{(E-1)x} dx.$$

该无穷积分收敛当且仅当

$$E - 1 < 0,$$

即

$$E < 1.$$

(b) 逐项积分:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(Ex)^n}{n!} e^{-x} dx = \frac{E^n}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$$

而

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \Gamma(n+1) = n!.$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{(Ex)^n}{n!} e^{-x} dx = E^n.$$

因此问题化为几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} E^n$ 的收敛性。它收敛当且仅当 $|E| < 1$ 。所以

$$-1 < E < 1.$$

总结:

$$\int \sum \quad \text{与} \quad \sum \int$$

不是同一个问题。本题中二者给出的参数范围分别为

$$\boxed{E < 1} \quad \text{和} \quad \boxed{|E| < 1}.$$

问题出在了 $E \leq -1$ 时, 绝对可积性被破坏了。

□

2.4 综合压轴: 层蛋糕公式

例题 2.7: 由正项级数得到瑕积分: 层蛋糕公式 (2024 年真题) 设级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

收敛, 每项 $a_n > 0$ 。设

$$T = \max\{a_n : n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

对于每个实数 $x > 0$, 定义

$$L(x) = \#\{n : a_n > x\},$$

即序列 $\{a_n\}$ 中大于 x 的项的个数。

证明:

(a) 0 是 $L(x)$ 的瑕点;

(b) 瑕积分

$$\int_0^T L(x) dx$$

收敛, 并且

$$\int_0^T L(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

解答. 因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

收敛且 $a_n > 0$, 所以

$$a_n \rightarrow 0.$$

因此当 $x > 0$ 固定时, 只有有限多个 a_n 大于 x , 所以

$$L(x) < +\infty.$$

但当

$$x \rightarrow 0^+$$

时, 满足 $a_n > x$ 的项数会越来越多. 由于正项级数有无穷多项, 且 $a_n \rightarrow 0$, 函数 $L(x)$ 在 0 附近一般无界, 因此 0 是该瑕积分的瑕点.

下面证明积分公式.

对每个 n , 有

$$a_n = \int_0^T \mathbf{1}_{\{0 < x < a_n\}} dx.$$

因为 $a_n \leq T$, 所以该等式显然成立.

于是

$$\sum_{n=0}^N a_n = \sum_{n=0}^N \int_0^T \mathbf{1}_{\{0 < x < a_n\}} dx.$$

有限求和与积分可以交换:

$$\sum_{n=0}^N a_n = \int_0^T \sum_{n=0}^N \mathbf{1}_{\{a_n > x\}} dx.$$

令

$$L_N(x) = \sum_{n=0}^N \mathbf{1}_{\{a_n > x\}}.$$

则

$$L_N(x) \uparrow L(x) \quad (N \rightarrow \infty).$$

因此

$$\int_0^T L_N(x) dx = \sum_{n=0}^N a_n.$$

由于右端

$$\sum_{n=0}^N a_n$$

随 N 增大并收敛到

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

所以左端也有有限极限. 于是瑕积分

$$\int_0^T L(x) dx$$

收敛, 并且

$$\int_0^T L(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T L_N(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

因此

$$\boxed{\int_0^T L(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.}$$

□

知识 2.5: 广义积分与含参积分收尾总结

看到的形式	第一反应
$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx$	Gamma 函数。
$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$	Beta 函数, 并检查 $p, q > 0$ 。
$\sin x, \cos x$ 振荡到无穷远	Dirichlet 或 Abel 判别法。
$\sin x$ 在无穷多个点为 0	每个 $k\pi$ 附近局部比较, 再对 k 求和。
$\int f(x, t) dx$ 问一致收敛	优先找控制函数; 不行就算尾积分的参数上确界。
要求求出含参积分	考虑对参数求导, 得到微分方程或可积表达式。
$\int \sum$ 与 $\sum \int$ 同时出现	千万不要默认可以交换; 分别计算, 参数范围可能不同。
$\#\{a_n > x\}$ 计数函数	想到层蛋糕公式: $\int_0^T L(x) dx = \sum a_n.$

广义积分考局部奇性, 含参积分考一致控制, 综合题考交换顺序。