

傅立叶级数

秦加俊

2026 年 6 月 20 日

1 傅里叶级数历年真题特训

【命题通览】近几年高数 B 期末中，傅里叶级数基本每年一道大题，题型非常稳定：

先求傅里叶级数，再用收敛定理或 Parseval 等式求数项级数。

知识 1.1: 傅里叶级数真题路线图

年份	函数	核心考点
2022	e^x	非奇非偶函数，直接计算 a_0, a_n, b_n ；端点处用 Dirichlet 收敛定理取左右极限平均值。
2023	x^2	偶函数展开，只剩余弦项；代入特殊点求 $\sum 1/n^2$ 、 $\sum (-1)^n/n^2$ ；用 Parseval 求 $\sum 1/n^4$ 。
2024	e^x	再次考察 e^x 的傅里叶系数；进一步用 Parseval 等式求 $\sum 1/(1+n^2)$ 。
2025	$ x $	偶函数展开，只剩余弦项；用 Parseval 求奇数项四次方和，再反推出 $\sum 1/n^4$ 。

考场优先级：

先看奇偶性；再算系数；端点看左右极限；求级数和优先想 Parseval。

知识 1.2: 傅里叶级数基本公式与两个收割工具

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 则其傅里叶级数形式为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

工具	使用方法
Dirichlet 收敛定理	连续点处收敛到 $f(x)$; 第一类间断点处收敛到 $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$ 周期端点也要按周期延拓后的左右极限取平均。
Parseval 等式	若 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$ 则 $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) ^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$ 它常用于计算 $\sum 1/n^2, \sum 1/n^4, \sum 1/(1+n^2)$ 等级数。

例题 1.1: 傅里叶级数基础展开与端点收敛 (2022 年真题) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是周期为 2π 的函数, 且 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi]$ 上等于 e^x . 求 $f(x)$ 的傅里叶级数, 并求此傅里叶级数在 $x = \pi$ 处的收敛值。

解答. 由于 e^x 在 $(-\pi, \pi]$ 上既非奇函数也非偶函数, 因此需要直接计算 a_0, a_n, b_n 。

首先

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} = \frac{2 \sinh \pi}{\pi}.$$

所以常数项为

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\sinh \pi}{\pi}.$$

当 $n \geq 1$ 时,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, dx.$$

利用

$$\int e^x \cos nx \, dx = \frac{e^x(\cos nx + n \sin nx)}{1 + n^2},$$

得到

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^x(\cos nx + n \sin nx)}{1 + n^2} \right]_{-\pi}^{\pi}.$$

由于

$$\sin(n\pi) = 0, \quad \cos(n\pi) = (-1)^n,$$

所以

$$a_n = \frac{(-1)^n(e^\pi - e^{-\pi})}{\pi(1 + n^2)} = \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1 + n^2)}.$$

同理,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \, dx.$$

利用

$$\int e^x \sin nx \, dx = \frac{e^x(\sin nx - n \cos nx)}{1 + n^2},$$

得到

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^x(\sin nx - n \cos nx)}{1 + n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{n(-1)^n(e^\pi - e^{-\pi})}{\pi(1 + n^2)}.$$

即

$$b_n = -\frac{2n(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1 + n^2)}.$$

所以傅里叶级数为

$$\frac{\sinh \pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1 + n^2)} \cos nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1 + n^2)} \sin nx.$$

下面求 $x = \pi$ 处的收敛值。由于周期延拓后

$$f(\pi^-) = e^\pi, \quad f(\pi^+) = f(-\pi^+) = e^{-\pi},$$

所以由 Dirichlet 收敛定理,

$$S(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2} = \cosh \pi.$$

因此

$$S(\pi) = \cosh \pi.$$

□

例题 1.2: 偶函数展开与经典级数求和 (2023 年真题) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 且在 $[-\pi, \pi]$ 上

$$f(x) = x^2.$$

求 $f(x)$ 的傅里叶级数及其和函数, 并求

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

解答. $f(x) = x^2$ 是偶函数, 所以

$$b_n = 0, \quad n \geq 1.$$

常数项为

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

因此

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

当 $n \geq 1$ 时,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx.$$

分部积分两次:

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \left[x^2 \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx.$$

第一项为 0。又

$$\int_0^{\pi} x \sin nx dx = \left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx = -\frac{\pi(-1)^n}{n}.$$

所以

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}.$$

于是

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

因此傅里叶级数为

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

由于周期延拓后的 x^2 连续且分段光滑, 所以其傅里叶级数处处收敛到原函数的周期延拓。

第一, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 。

令 $x = \pi$, 则 $\cos(n\pi) = (-1)^n$, 得到

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

第二, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 。

令 $x = 0$, 则 $\cos 0 = 1$, 得到

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

第三, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 。

由 Parseval 等式,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

左边为

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{5}.$$

右边为

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi^2}{3} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^n}{n^2} \right)^2 = \frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

所以

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

因此

$$16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{8\pi^4}{45}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

□

例题 1.3: 重复考点升级: 由 e^x 的 **Fourier** 系数求 $\sum \frac{1}{1+n^2}$ (2024 年真题) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是周期为 2π 的函数, 且 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi]$ 上等于 e^x . 求 $f(x)$ 的傅里叶级数, 并求该傅

里叶级数在 $x = \pi$ 处的和；进一步求

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

解答. 傅里叶系数与 2022 年真题完全相同：

$$a_0 = \frac{2 \sinh \pi}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)}, \quad b_n = -\frac{2n(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)}.$$

因此傅里叶级数为

$$\frac{\sinh \pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \cos nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \sin nx.$$

在 $x = \pi$ 处，由周期延拓后的左右极限平均值可得

$$S(\pi) = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} = \cosh \pi.$$

下面计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

对 $f(x) = e^x$ 应用 Parseval 等式：

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

左边为

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} dx = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2\pi} = \frac{\sinh(2\pi)}{\pi} = \frac{2 \sinh \pi \cosh \pi}{\pi}.$$

右边中

$$\frac{a_0^2}{2} = \frac{2 \sinh^2 \pi}{\pi^2}.$$

并且

$$a_n^2 + b_n^2 = \frac{4 \sinh^2 \pi}{\pi^2(1+n^2)^2} + \frac{4n^2 \sinh^2 \pi}{\pi^2(1+n^2)^2} = \frac{4 \sinh^2 \pi}{\pi^2(1+n^2)}.$$

代入 Parseval 等式：

$$\frac{2 \sinh \pi \cosh \pi}{\pi} = \frac{2 \sinh^2 \pi}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sinh^2 \pi}{\pi^2(1+n^2)}.$$

两边同除以

$$\frac{4 \sinh^2 \pi}{\pi^2},$$

得到

$$\frac{\pi \cosh \pi}{2 \sinh \pi} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2} \coth \pi - \frac{1}{2}.$$

□

例题 1.4: 偶函数 $|x|$ 展开与 Parseval 求 $\sum 1/n^4$ (2025 年真题) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 且

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

求 $f(x)$ 的傅里叶级数及其和函数, 并求

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

解答. $f(x) = |x|$ 是偶函数, 所以

$$b_n = 0, \quad n \geq 1.$$

常数项为

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi.$$

因此

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

当 $n \geq 1$ 时,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx.$$

分部积分:

$$\int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \left[x \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx.$$

第一项为 0, 而

$$\int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n} = \frac{1 - (-1)^n}{n}.$$

所以

$$\int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = -\frac{1 - (-1)^n}{n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

因此

$$a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}.$$

当 n 为偶数时, $a_n = 0$; 当 n 为奇数时,

$$a_n = -\frac{4}{\pi n^2}.$$

所以傅里叶级数为

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ 为奇数}}} \frac{4}{\pi n^2} \cos nx.$$

也可写成

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \cos(2k-1)x.$$

由于 $|x|$ 的周期延拓函数连续且分段光滑, 所以其傅里叶级数处处收敛到该周期延拓函数本身。

下面用 Parseval 等式求

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Parseval 等式给出

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

左边为

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

右边为

$$\frac{\pi^2}{2} + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ 为奇数}}} \left(-\frac{4}{\pi n^2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ 为奇数}}} \frac{1}{n^4}.$$

所以

$$\frac{2\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ 为奇数}}} \frac{1}{n^4}.$$

移项得

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{16}{\pi^2} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ 为奇数}}} \frac{1}{n^4}.$$

于是

$$\sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ 为奇数}}} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

设

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

偶数项之和为

$$\sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ 为偶数}}} \frac{1}{n^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} = \frac{1}{16} A.$$

因此

$$A = \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16} A.$$

所以

$$\frac{15}{16} A = \frac{\pi^4}{96}.$$

最终得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

□

知识 1.3: 傅里叶级数真题的三类收尾方式

傅里叶级数大题的最后一步通常不是单纯写出级数，而是要“收割”一个具体数值。

收尾方式	典型操作
端点收敛值	在周期端点 $x = \pi$ 处，不要直接代原函数值，而要取周期延拓后的左右极限平均： $S(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2}.$
代特殊点求级数	把 Fourier 展开式中的 x 取为 $0, \pi$ 等特殊点，使 $\cos(n\pi) = (-1)^n, \quad \sin(n\pi) = 0,$ 从而得到 $\sum 1/n^2$ 或 $\sum (-1)^n/n^2$。
Parseval 求平方型级数	当 Fourier 系数里出现 $\frac{1}{n^2}$ 或 $\frac{1}{1+n^2}$ 时，平方后会产生 $\frac{1}{n^4}, \quad \frac{1}{1+n^2},$ 这时优先使用 Parseval 等式。

看到傅里叶系数平方后能变成目标级数，就立刻想到 Parseval。