线性空间

秦加俊

2026 年 4 月 9 日

1 矩阵的中心化子

例题 1.1: 友阵的中心化子是其多项式 设 $C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 是首一多项式 $f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ 的友矩阵（Companion matrix）。证明：矩阵 X 与 C 可交换（即 $XC = CX$）的充要条件是 X 可以表示为 C 的多项式，即存在多项式 $g(\lambda)$ 使得 $X = g(C)$。

例题 1.2: Sylvester 方程与特征值的关系 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$。证明：矩阵方程 $AX - XB = O$ 只有零解 $X = O$（其中 $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$）的充要条件是矩阵 A 与 B 没有公共特征值。

例题 1.3: 分块对角阵的中心化子结构 设分块对角阵 $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_k)$，其中 A_i 为 n_i 阶方阵。假设对于任意的 $i \neq j$，矩阵 A_i 与 A_j 均没有公共特征值。证明：若矩阵 X 与 A 可交换（即 $XA = AX$），则 X 必定也是与 A 具有相同划分的分块对角阵，即 $X = \mathrm{diag}(X_1, X_2, \ldots, X_k)$，且对每个分块均满足 $X_iA_i = A_iX_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$。

2 线性空间

A1. 证明:数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $V(V \neq \{0\})$ 不能被它的有限个真子空间所覆盖,即设 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ 是 V 的真子空间，则存在 $\alpha \in V$，使得

$$\alpha \notin W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_k.$$

A2. 设 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ 都是线性空间 V 的真子空间，$V \neq \{0\}, k \in \mathbb{N}$，证明：存在 V 的基 B，使得 $B \cap (W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_k) = \varnothing$。

A3. 设 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ 是 n 维线性空间 V 的子空间,且 $m < n$。证明:如果对任意 i $(1 \leq i \leq k)$,

成立 $\dim W_i \le m$，则存在 V 的子空间 U，使得 $\dim U = n - m$，且对任意 $1 \le i \le k$，都有 $U \cap W_i = \{0\}$。

A4. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间，$W_1, W_2, \dots, W_k$ 是 V 的维数相同的子空间，证明：$W_1, W_2, \dots, W_k$ 有公共的直和补，即存在 V 的子空间 U，使得对 $i = 1, 2, \dots, k$ 都有 $V = W_i \oplus U$。

A5. 类比于三个有限集的并的所含元素个数公式，猜想对于有限维线性空间 V 的三个子空间 W_1, W_2, W_3，成立

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + W_2 + W_3) = \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 - \dim(W_1 \cap W_2) - \dim(W_1 \cap W_3) \\ - \dim(W_2 \cap W_3) + \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3).\end{aligned}$$

上面公式是否成立？成立时给出证明，不成立时举出反例。

A6. 设 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{K}$ 都是数域，且 $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$，将 $\mathbb{K}$ 作为 $\mathbb{F}$ 上线性空间的维数记为 $[\mathbb{K} : \mathbb{F}]$。设 $\mathbb{E}$ 也是数域，且 $\mathbb{K} \subset \mathbb{E}$。证明：如果 $[\mathbb{E} : \mathbb{K}] < \infty$ 且 $[\mathbb{K} : \mathbb{F}] < \infty$，那么 $[\mathbb{E} : \mathbb{F}] = [\mathbb{E} : \mathbb{K}][\mathbb{K} : \mathbb{F}]$。

A7. 证明：实数集 $\mathbb{R}$ 作为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间是无限维的。（提示：实数集 $\mathbb{R}$ 的势是不可数无穷或者利用超越数。）

A8. 设 W 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 中所有形如 $[A, B]$, $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 的矩阵所生成的子空间。证明：

(1) $W = \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$;

(2) $\dim W = n^2 - 1$.

A9. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是 n 维线性空间 V 的两组基，$1 \le m < n$，证明：存在 $1, 2, \dots, n$ 的排列 $i_1, i_2, \dots, i_n$，使得 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_{i_{m+1}}, \dots, \beta_{i_n}$ 和 $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_m}, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$ 仍是 V 的两组基。

A10. 设 V 是有限维实线性空间，对任意 $\alpha, \beta \in V$，V 中连接 α 和 β 的线段定义为

$$L(\alpha, \beta) = \{t\alpha + (1 - t)\beta \mid 0 \le t \le 1\}.$$

设 W 是 V 的真子空间，对任意 $\alpha, \beta \in V - W$，如果 $L(\alpha, \beta) \cap W = \varnothing$，则记 $\alpha \equiv \beta$。(1) 证明：如果 $\dim W = \dim V - 1$，则 $\equiv$ 为集合 $V - W$ 中的等价关系，且商集合 $(V - W)/\equiv$ 为二元集；(2) 如果不要求 $\dim W = \dim V - 1$，那么 $\equiv$ 是否还是集合 $V - W$ 中的等价关系？说明理由。