# 重积分讲义

秦加俊

2026 年 3 月 14 日

## 知识 0.1: 重积分换元公式

**【坐标系变换与雅可比行列式】**

- **一般变量代换（雅可比行列式）**:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

- **极坐标变换** $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$
  **微元替换**: $dxdy \longrightarrow r\,drd\theta$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,drd\theta$$

- **柱坐标变换** $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z)$
  **微元替换**: $dxdydz \longrightarrow r\,drd\theta dz$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,drd\theta dz$$

- **球坐标变换** $(x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi)$
  **微元替换**: $dxdydz \longrightarrow r^2\sin\varphi\,drd\theta d\varphi$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(x(r,\varphi,\theta),\dots) r^2\sin\varphi\,drd\theta d\varphi$$

## 知识 0.2: 重积分（二重、三重）的一般计算步骤

重积分的核心计算思想是：**"化重积分为累次积分（单积分的嵌套）"**。无论是二重还是三重积分，按如下四步走：

**Step 1. 画图确定积分区域**

画出积分区域 $D$（二维）或 $\Omega$（三维）的草图，并求出边界交点。如果不画图直接硬算，极易在定限时出错。

**Step 2. 选择坐标系**

观察**积分区域的形状**和**被积函数的结构**。

- 若区域含圆/扇形，或含有 $x^2+y^2$，可选用**极坐标**（切记面积微元多乘一个 $r$：$dxdy = r\,drd\theta$）。
- 若区域为旋转体，选用**柱坐标**；若含球体或 $x^2+y^2+z^2$，选用**球坐标**（体积微元多乘 $r^2\sin\varphi$）。
- 一般换元，这种区域特点很明显。

**Step 3. 确定积分顺序**

画一条平行于某坐标轴的射线穿过区域。

- **内层积分**：射线的“穿入点”是下限，“穿出点”是上限（通常是变量的函数）。
- **外层积分**：将区域投影到某条轴或某个面上，投影的极值就是外层积分的常数上下限。

**Step 4. 由内向外，逐层积分**

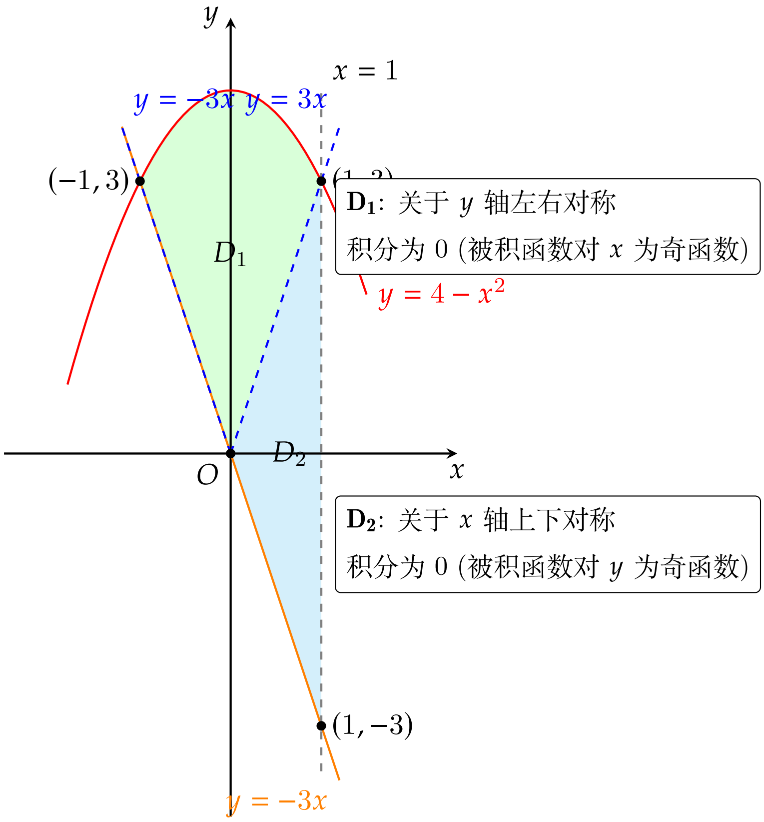
计算内层积分时，将外层变量视为常数。若发现某一层“积不出”（如 $e^{x^2}$），立刻返回 Step 3 **交换积分次序**，也可能要回到 Step 2 **换元**，引入坐标变换积分微元多出来的函数。

**注意奇偶对称性对于积分计算的简化**

# 1 二重积分

## 1.1 关注一下奇对称性

**例题 1.1:** 区域切割　计算二重积分 $\iint_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})dxdy$，其中 $D$ 是曲线 $y=4-x^2$，直线 $y=-3x$ 及直线 $x=1$ 围成的位于直线 $x=1$ 左边的部分。




**解答**. 观察被积函数天生的 **"双重奇性"**，并通过**几何辅助线**切割区域，各自相消。

**第一步：挖掘被积函数的双重奇性**

令被积函数 $f(x, y) = x\ln(y + \sqrt{1 + y^2})$，它同时具备：

- **关于 x 是奇函数**：$f(-x, y) = -x\ln(y + \sqrt{1 + y^2}) = -f(x, y)$
- **关于 y 是奇函数**：$f(x, -y) = x\ln(-y + \sqrt{1 + y^2}) = x\ln\frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}} = -f(x, y)$

**第二步：引入辅助线，分割区域**

联立边界方程 $4 - x^2 = -3x$，解得交点 $x = -1$ 和 $x = 4$。由题意知积分区间为 $x \in [-1, 1]$，原区域 $D$ 的上下界为：$-3x \le y \le 4 - x^2$。

为了分别利用 $x$ 和 $y$ 的奇偶性，我们**引入辅助线 $\mathbf{y = 3x}$**，将原区域 $D$ 切割为 $D_1$ 和 $D_2$ 两个部分：

$$I = \iint_{D_1} f(x, y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)\,dxdy$$

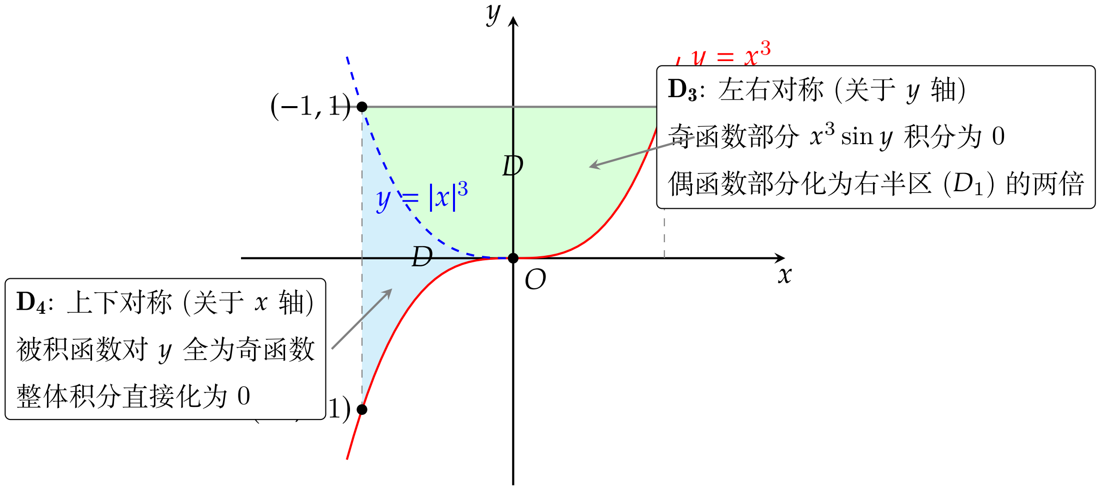
**第三步：分别利用对称性清零**

**结论：**

$$I = 0 + 0 = 0$$

□

> **例题 1.2:** 对称区域切割　如果设 $D=\{(x,y)|-1\le x\le 1, x^3\le y\le 1\}$，$D_1=\{(x,y)|0\le x\le 1, x^3\le y\le 1\}$，则 $\iint_D(x^3\sin y+y^3\cos x)dxdy=$（　）。
> A. $2\iint_{D_1}y^3\cos x dxdy$　B. $2\iint_{D_1}x^3\sin y dxdy$　C. $4\iint_{D_1}(x^3\sin y+y^3\cos x)dxdy$　D. 0




**解答**. 正确答案选 A。

面对 $D$ 这个非对称区域，我们可以借鉴上一题的思路：**引入几何辅助线，将区域切割成几个"对称区域"，分别利用奇偶性**。

**结论：**

$$I=0+2\iint_{D_1}y^3\cos x\,dxdy$$

□

## 1.2　常规计算

> **例题 1.3:** 二重积分的基础计算　计算二重积分：$I=\iint_D|x-y^2|dxdy$。其中，平面区域 $D$ 满足 $0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$。

**解析：**本题带有绝对值，核心思路是**"按正负拆分积分区域"**。令 $x-y^2=0$，即 $x=y^2$。这条抛物线将正方形区域 $D$ 划分成了两部分：

- $D_1$：$x\ge y^2$（此时 $x-y^2\ge 0$）
- $D_2$：$x\le y^2$（此时 $x-y^2\le 0$）

**解答**. 为了计算方便，我们选择"先 $x$ 后 $y$"（即 $Y$-型区域）的积分顺序：

$$\begin{aligned}I&=\iint_{D_1}(x-y^2)\,dxdy+\iint_{D_2}(y^2-x)\,dxdy\\&=\int_0^1dy\int_{y^2}^1(x-y^2)\,dx+\int_0^1dy\int_0^{y^2}(y^2-x)\,dx\end{aligned}$$

分别计算内层积分:

$$\int_{y^2}^{1}(x-y^2)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2-y^2x\right]_{y^2}^{1}=\left(\frac{1}{2}-y^2\right)-\left(\frac{1}{2}y^4-y^4\right)=\frac{1}{2}-y^2+\frac{1}{2}y^4$$

$$\int_{0}^{y^2}(y^2-x)\,dx=\left[y^2x-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{y^2}=y^4-\frac{1}{2}y^4=\frac{1}{2}y^4$$

代入外层积分:

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\left(\frac{1}{2}-y^2+y^4\right)dy\\&=\left[\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5\right]_0^1\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{15-10+6}{30}=\frac{11}{30}\end{aligned}$$

□

**例题 1.4: 利用积分区域对称性** 计算 $\iint_D(x^2+y^2)dxdy$,其中 $D$ 是由直线 $y=x$,$y=x+a$,$y=a$, $y=3a(a>0)$ 所围成的区域。

解答.【**解法一: 看作 Y 型区域**】

积分区间为 $y\in[a,3a]$。将二重积分化为先对 $x$、后对 $y$ 的累次积分:

$$I=\int_a^{3a}dy\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)\,dx$$

先计算内层关于 $x$ 的定积分(将 $y$ 视为常数):

$$\begin{aligned}\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)\,dx&=\left[\frac{1}{3}x^3+xy^2\right]_{y-a}^{y}\\&=\left(\frac{1}{3}y^3+y^3\right)-\left[\frac{1}{3}(y-a)^3+(y-a)y^2\right]\\&=\frac{4}{3}y^3-\left[\frac{1}{3}(y^3-3y^2a+3ya^2-a^3)+y^3-ay^2\right]\\&=\frac{4}{3}y^3-\left(\frac{4}{3}y^3-2ay^2+a^2y-\frac{1}{3}a^3\right)\\&=2ay^2-a^2y+\frac{1}{3}a^3\end{aligned}$$

将内层结果代入外层关于 $y$ 的积分:

$$\begin{aligned}I&=\int_a^{3a}\left(2ay^2-a^2y+\frac{1}{3}a^3\right)dy\\&=\left[\frac{2}{3}ay^3-\frac{1}{2}a^2y^2+\frac{1}{3}a^3y\right]_a^{3a}\end{aligned}$$

代入上下限:

- 上限 $3a$: $\frac{2}{3}a(27a^3)-\frac{1}{2}a^2(9a^2)+\frac{1}{3}a^3(3a)=18a^4-\frac{9}{2}a^4+a^4=\frac{29}{2}a^4$

- 下限 $a$: $\frac{2}{3}a^4 - \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{3}a^4 = \frac{1}{2}a^4$

两式相减得到最终结果：

$$I = \frac{29}{2}a^4 - \frac{1}{2}a^4 = 14a^4$$

**【解法二：用换元把平行四边形拉回到长方形】**

令 $u = y - x, v = y$，则积分区域变为矩形 $D' : 0 \le u \le a, a \le v \le 3a$。逆变换为 $x = v - u, y = v$。计算雅可比行列式：

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \implies |J| = 1$$

将被积函数化为新变量：$x^2 + y^2 = (v-u)^2 + v^2 = 2v^2 - 2uv + u^2$。代入换元公式：

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{D'} (2v^2 - 2uv + u^2)|J|\,du dv \\
&= \int_a^{3a} dv \int_0^a (2v^2 - 2uv + u^2)\,du \\
&= \int_a^{3a} \left[2v^2u - vu^2 + \frac{1}{3}u^3\right]_0^a dv \\
&= \int_a^{3a} \left(2av^2 - a^2v + \frac{1}{3}a^3\right) dv \\
&= \left[\frac{2}{3}av^3 - \frac{1}{2}a^2v^2 + \frac{1}{3}a^3v\right]_a^{3a}
\end{aligned}$$

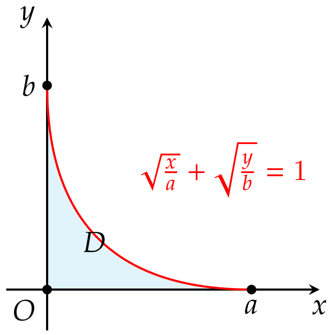
代入上下限计算：

$$\text{上限}3a : \frac{2}{3}a(27a^3) - \frac{1}{2}a^2(9a^2) + \frac{1}{3}a^3(3a) = 18a^4 - \frac{9}{2}a^4 + a^4 = \frac{29}{2}a^4$$

$$\text{下限}a : \frac{2}{3}a^4 - \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{3}a^4 = \frac{1}{2}a^4$$

相减得到最终结果：$I = \frac{29}{2}a^4 - \frac{1}{2}a^4 = 14a^4$。 □

**例题 1.5:** 曲线围成区域的重积分计算（变量代换法） 计算 $I = \iint_D y\,dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ 及 $x$ 轴和 $y$ 轴围成，其中 $a > 0, b > 0$。



解答.【解法一：常规做法】

如果不换元，我们可以直接在直角坐标系下将其视为 $X$-型区域进行积分。

**第一步：化简边界方程并定限**

由曲线方程 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$，分离出 $y$：

$$\sqrt{\frac{y}{b}}=1-\sqrt{\frac{x}{a}} \implies y=b\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2$$

显然，积分区域 $D$ 在 $x$ 轴上的投影区间为 $[0,a]$。对于任意给定的 $x\in[0,a]$，纵向穿线的下限为 $y=0$，上限为 $y=b\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2$。于是，二重积分化为累次积分：

$$I=\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2} y\,dy$$

**第二步：计算内层关于 $y$ 的积分**

$$\int_0^{b\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2} y\,dy=\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{b\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2}=\frac{1}{2}b^2\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^4$$

这计算量有点大了，其实一开始就不该这么做，通过观察应该能发现，先对 x 积分显然更方便。

**【解法一：Y 型区域】 视角选取极其关键！** 如果将其看作 X 型区域（先 $y$ 后 $x$），代入上限后会产生 4 次方展开式，极易算错；但如果将其看作 **Y 型区域**（先 $x$ 后 $y$），因为被积函数没有 $x$，积分后仅仅产生 2 次方，计算量大幅骤减！

**第一步：化简边界方程并定限**

由曲线方程 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$，反解出 $x$：

$$\sqrt{\frac{x}{a}}=1-\sqrt{\frac{y}{b}} \implies x=a\left(1-\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2$$

积分区域 $D$ 在 $y$ 轴上的投影区间为 $[0,b]$。对于任意给定的 $y\in[0,b]$，横向穿线的下限为 $x=0$，上限为 $x=a\left(1-\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2$。于是，二重积分化为先对 $x$、后对 $y$ 的累次积分：

$$I=\int_0^b dy\int_0^{a\left(1-\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2} y\,dx$$

**第二步：计算内层关于 $x$ 的积分**

因为内层是对 $x$ 积分，$y$ 视为常数，直接积出一个 $x$ 即可：

$$\int_0^{a\left(1-\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2} y\,dx=y\cdot[x]_0^{a\left(1-\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2}=ay\left(1-\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2$$

**第三步：计算外层关于 $y$ 的积分（直接展开）**

将内层结果代入外层。由于括号外自带一个 $y$，且括号内只是一个完全平方，我们可以极其轻

松地将其展开成幂函数相加的形式：

$$\begin{aligned} I &= \int_0^b ay\left(1-2\sqrt{\frac{y}{b}}+\frac{y}{b}\right)dy \\ &= a\int_0^b\left(y-\frac{2}{\sqrt{b}}y^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{b}y^2\right)dy \\ &= a\left[\frac{1}{2}y^2-\frac{2}{\sqrt{b}}\cdot\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{3}y^3\right]_0^b \end{aligned}$$

代入上限 $b$（下限代入全为 0）：

$$\begin{aligned} I &= a\left(\frac{1}{2}b^2-\frac{4}{5}b^2+\frac{1}{3}b^2\right) \\ &= ab^2\left(\frac{15-24+10}{30}\right)=\frac{ab^2}{30} \end{aligned}$$

**结论：** 在考场上，这种通过切换积分次序来规避高次幂展开的技巧，往往能救大命！

**【解法二：采用变量替换可以将区域化为标准三角形】**

**第一步：引入变量代换化简区域**

令 $u=\sqrt{\frac{x}{a}}, v=\sqrt{\frac{y}{b}}$。则原边界方程化为了标准直线 $u+v=1$。由于 $x, y$ 均在第一象限，新区域变为了 $uv$ 平面上的一个直角三角形 $D': u+v\le 1, u\ge 0, v\ge 0$。由代换公式可知原变量为 $x=au^2, y=bv^2$。

**第二步：计算雅可比行列式**

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} 2au & 0 \\ 0 & 2bv \end{vmatrix}=4abuv$$

由于在第一象限 $u>0, v>0$，雅可比行列式的绝对值 $|J|=4abuv$。因此面积微元 $dxdy=4abuv\,dudv$。

**第三步：在新区域上进行积分**

将被积函数 $y=bv^2$ 和面积微元一同代入，并对三角形区域 $D'$ 穿线定限（先 $v$ 后 $u$）：

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'}(bv^2)\cdot(4abuv)\,dudv \\ &= 4ab^2\iint_{D'}uv^3\,dudv \\ &= 4ab^2\int_0^1 du\int_0^{1-u}uv^3\,dv \end{aligned}$$

通过观察，这里仍然是先 $u$ 后 $v$ 更合适。

**第三步：在新区域上进行积分（先 $u$ 后 $v$ 极其简便）**

为了避免高次幂展开，我们选择**先对 $u$ 积分、后对 $v$ 积分**：

$$I=4ab^2\int_0^1 dv\int_0^{1-v}uv^3\,du$$

先计算内层关于 $u$ 的定积分（将 $v$ 视为常数）：

$$\int_0^{1-v}uv^3\,du=v^3\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^{1-v}=\frac{1}{2}v^3(1-v)^2$$

**第四步：计算外层的一元定积分**

将内层结果代回外层积分：

$$I = 4ab^2 \int_0^1 \frac{1}{2} v^3 (1-v)^2 \, dv = 2ab^2 \int_0^1 v^3 (1-v)^2 \, dv$$

此时，括号内仅仅是一个完全平方，直接将其展开，计算极其轻松：

$$\begin{aligned} I &= 2ab^2 \int_0^1 v^3 (1 - 2v + v^2) \, dv \\ &= 2ab^2 \int_0^1 (v^3 - 2v^4 + v^5) \, dv \\ &= 2ab^2 \left[ \frac{1}{4} v^4 - \frac{2}{5} v^5 + \frac{1}{6} v^6 \right]_0^1 \\ &= 2ab^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \right) \end{aligned}$$

通分计算括号内的值（公分母为 60）：

$$I = 2ab^2 \left( \frac{15 - 24 + 10}{60} \right) = 2ab^2 \left( \frac{1}{60} \right) = \frac{ab^2}{30}$$

**【教学小结】**这道题在换元后，再次向我们展示了**"选择合适积分次序"**的威力。先 $u$ 后 $v$ 只需展开 2 次方，而先 $v$ 后 $u$ 则需要展开 4 次方。做重积分时，"多看一眼，少算一半"！

**【解法三：坐标变换拉成扇形】**

面对方程 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$，如果我们想将其化为一个标准的"扇形（圆面）"区域，就需要凑出 $u^2 + v^2 = 1$ 的形式。

**第一步：非线性换元，将区域化为单位圆的四分之一**

令 $\sqrt{\frac{x}{a}} = u^2$，$\sqrt{\frac{y}{b}} = v^2$。这等价于作变量代换：$x = au^4$，$y = bv^4$ $(u \geq 0, v \geq 0)$。在此变换下，原边界变成了 $u^2 + v^2 = 1$。因此，积分区域被完美映射为 $uv$ 平面内第一象限的四分之一单位圆盘 $D_{uv} : u^2 + v^2 \leq 1, u \geq 0, v \geq 0$。

**第二步：计算雅可比行列式**

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 4au^3 & 0 \\ 0 & 4bv^3 \end{vmatrix} = 16abu^3 v^3$$

因为 $u, v$ 在第一象限，所以面积微元 $dxdy = 16abu^3 v^3 \, dudv$。

**第三步：在 $uv$ 平面上引入极坐标系**

将被积函数 $y = bv^4$ 和微元代入二重积分：

$$I = \iint_{D_{uv}} (bv^4) \cdot (16abu^3 v^3) \, dudv = 16ab^2 \iint_{D_{uv}} u^3 v^7 \, dudv$$

既然区域 $D_{uv}$ 是标准的四分之一圆，我们果断使用极坐标：令 $u = r\cos\theta$，$v = r\sin\theta$。定限为 $0 \leq r \leq 1$，$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$。微元 $dudv = r \, dr d\theta$。

$$\begin{aligned} I &= 16ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (r\cos\theta)^3 (r\sin\theta)^7 r \, dr \\ &= 16ab^2 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \sin^7\theta \, d\theta \right) \left( \int_0^1 r^{11} \, dr \right) \end{aligned}$$

**第四步：分离变量，分别积分**

关于 $r$ 的积分极其简单：

$$\int_0^1 r^{11}\,dr = \frac{1}{12}$$

关于 $\theta$ 的三角积分，将 $\cos^3\theta$ 拆出一个 $\cos\theta$ 凑微分：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\sin^7\theta(\cos\theta\,d\theta) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\sin^7\theta\,d(\sin\theta)\\ &= \left[\frac{1}{8}\sin^8\theta - \frac{1}{10}\sin^{10}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}-\frac{1}{10} = \frac{1}{40}\end{aligned}$$

这个方法这里计算略复杂了。

将两部分结果乘起来：

$$I = 16ab^2\cdot\frac{1}{40}\cdot\frac{1}{12} = \frac{16ab^2}{480} = \frac{ab^2}{30}$$

**【教学小结】**从“常规做法”到“三角形区域”，再到这种“圆形区域”，一道题三种解法，完美地向我们展示了重积分的核心思想——**被积函数与积分区域的相互妥协**。只要代换找得准，哪怕是再扭曲的边界，也能被我们“盘”成最舒服的形状！

□

## 1.3　极坐标与参数方程

**例题 1.6:** 极坐标与直角坐标的转换　累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\cos\theta} r f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr$ 等于（　）。

A. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$

B. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

C. $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$

D. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$

*解答*. **正确答案选 D**。

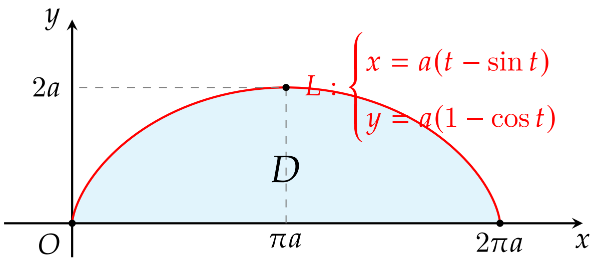
本题考察**极坐标系与直角坐标系的区域转换**。由给定的二次积分可知，积分区域为：$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, $0\le r\le\cos\theta$。将极坐标边界 $r=\cos\theta$ 两边同乘 $r$，得到 $r^2 = r\cos\theta$，转换为直角坐标方程即为：

$$x^2+y^2 = x \implies \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

这表明区域 $D$ 是一个圆心在 $(1/2, 0)$、半径为 $1/2$ 的圆。又因为 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，说明区域位于第一象限（上半圆）。所以直角坐标系下的区域为：$D = \{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{x-x^2}\}$。

对照选项，将其写为先对 $y$ 积分、后对 $x$ 积分的累次积分形式，显然 D 选项的定限完全吻合。□

**例题 1.7:** 参数方程定限 计算 $\iint_D y dxdy$，其中 $D$ 是由 $L: \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 与 $x$ 轴围成的区域。




这里我课上讲错了，摆线图像是左右对称的。

**解析：** 通过画图，得知积分区域为 $X$ 型区域，先计算内部积分，然后算外层积分时都转化到以参数 $t$ 为变元，这是参数方程的特性决定的，因为你没发写出 $y$ 关于 $x$ 的函数，只能借助参变量。

*解答*. 积分区域 $D$ 的顶端是摆线 $y = y(x)$，底部是 $x$ 轴。对于给定的 $x$，上限是摆线的纵坐标 $y$，下限是 0。我们先将其写为关于 $x, y$ 的二次积分：

$$I = \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y(x)} y\, dy = \int_0^{2\pi a} \frac{1}{2} y^2(x)\, dx$$

利用参数方程换元，将对 $x$ 的积分全部转化为对参数 $t$ 的积分。已知 $x = a(t - \sin t)$，则微元 $dx = a(1 - \cos t)dt$。当 $x$ 从 0 变到 $2\pi a$ 时，参数 $t$ 对应的从 0 变到 $2\pi$。

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a(1 - \cos t)]^2 \cdot a(1 - \cos t)\, dt \\ &= \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\, dt \end{aligned}$$

展开被积函数：$(1 - \cos t)^3 = 1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t$。根据三角函数在周期 $[0, 2\pi]$ 上的积分性质，奇数次方的余弦项积分全为 0：

$$\int_0^{2\pi} \cos t\, dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt = 0$$

剩下两项的积分为：

$$\int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi, \quad 3\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = 3\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = 3\pi$$

所以：$I = \frac{a^3}{2}(2\pi + 3\pi) = \frac{5\pi a^3}{2}$。 □

## 2 三重积分

**例题 2.1:** 三重积分的三种坐标系穿线法 已知 $\Omega$ 是由 $x^2+y^2=4, z=0$ 以及 $z=x^2+y^2$ 所围成的立体。如果将 $I=\iiint_\Omega f(x,y,z)dv$ 分别化成直角坐标以及柱面坐标的三次积分时，它们分别为：

$I=$ ____________________

以及 $I=$ ____________________ 。

**解析：** 本题是一道非常纯粹的 **"穿线定限"** 基本功训练题。积分区域 $\Omega$ 下方是 $xy$ 平面 $(z=0)$，上方是旋转抛物面 $z=x^2+y^2$，外围是圆柱面 $x^2+y^2=4$。

*解答.* **1. 化为直角坐标系（先 $z$ 后 $x,y$）：** 区域 $\Omega$ 在 $xy$ 平面上的投影 $D_{xy}$ 是圆 $x^2+y^2\le 4$。在这个圆内穿线，对 $D_{xy}$ 采用 X-型区域定限：$-2\le x\le 2$，$-\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}$。对于任意投影点 $(x,y)$，竖直穿过立体的射线从 $z=0$ 穿入，从 $z=x^2+y^2$ 穿出。所以直角坐标下的三次积分为：

$$I=\int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\,dz$$

**2. 化为柱面坐标系：** 在柱面坐标下，$x^2+y^2=r^2$。投影区域 $D_{xy}$ 变为：$0\le\theta\le 2\pi$，$0\le r\le 2$。$z$ 的上下限直接替换为 $r$ 的表达式：$0\le z\le r^2$。注意体积微元要乘上雅可比因子 $r$，即 $dv=r\,drd\theta dz$。所以柱坐标下的三次积分为：

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2dr\int_0^{r^2}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\,dz$$

□

**例题 2.2:** 柱面坐标系计算三重积分 计算 $I=\iiint_\Omega z(x^2+y^2)dv$，其中 $\Omega$ 是由 $z=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围成的立体。

**解析：** 看到 $x^2+y^2$ 以及旋转体特征，果断选用**柱坐标系**。

*解答.* 首先求曲面交线以确定投影区域。联立抛物面 $z=r^2$ 与球面 $z=\sqrt{2-r^2}$：

$$r^2=\sqrt{2-r^2}\implies r^4+r^2-2=0\implies(r^2-1)(r^2+2)=0$$

因为 $r\ge 0$，解得 $r=1$。即投影区域 $D_{xy}$ 为 $0\le\theta\le 2\pi$，$0\le r\le 1$。穿线定限：下方曲面为抛物面 $z=r^2$，上方曲面为球面 $z=\sqrt{2-r^2}$。

$$\begin{aligned}
I&=\iiint_\Omega zr^2\cdot r\,drd\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1r^3\,dr\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}z\,dz\\
&=2\pi\int_0^1r^3\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}dr\\
&=\pi\int_0^1r^3\left((2-r^2)-r^4\right)dr=\pi\int_0^1(2r^3-r^5-r^7)\,dr\\
&=\pi\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)=\pi\left(\frac{12-4-3}{24}\right)=\frac{5\pi}{24}
\end{aligned}$$

□

**例题 2.3:** 求空间区域体积　求球体 $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ 和圆柱体 $x^2+y^2 \le ax(a>0)$ 的公共部分所成空间区域的体积 $V$。

**解析：** 这是经典的求圆柱与球体公共部分体积的问题。

**解答.** 根据对称性，立体关于 $xy, yz, zx$ 三个坐标平面均不对称，但关于 $z=0$ 面和 $y=0$ 面是对称的。我们可以只算第一卦限（$x, y, z \ge 0$）的体积，然后乘 4。在第一卦限，圆柱的投影区域 $D$ 为：圆 $r = a\cos\theta$ 在第一象限的部分（$0 \le \theta \le \pi/2$）。上方曲面为球面 $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2} = \sqrt{a^2-r^2}$。

$$\begin{aligned} V &= 4\iint_D \sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\,dr \end{aligned}$$

计算内层积分（凑微分 $d(a^2-r^2) = -2r\,dr$）：

$$\int_0^{a\cos\theta} r(a^2-r^2)^{1/2}\,dr = -\frac{1}{3}\left[(a^2-r^2)^{3/2}\right]_0^{a\cos\theta} = -\frac{1}{3}(a^3\sin^3\theta - a^3) = \frac{a^3}{3}(1-\sin^3\theta)$$

代入外层积分：

$$\begin{aligned} V &= \frac{4a^3}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,d\theta \\ &= \frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta\right) \\ &= \frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/2}\right) = \frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}a^3 - \frac{8}{9}a^3 \end{aligned}$$

□

**例题 2.4:** 球坐标系计算三重积分　计算积分 $\iiint_\Omega (\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c})^2 dv$，$\Omega: x^2+y^2+z^2 \le R^2$。

**解析：** 这题通过对称性的观察可以大大减轻计算量。

**解答.** 将被积函数展开：

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{2xy}{ab}+\frac{2yz}{bc}+\frac{2zx}{ca}$$

积分区域 $\Omega$ 是圆心在原点的球体，关于三个坐标平面完全对称。因此所有关于单变量的奇函数（如 $xy, yz, zx$）的积分**全为 0**。原积分退化为：

$$I = \iiint_\Omega \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dv$$

进一步利用球体的**轮换对称性**，有 $\iiint x^2dv = \iiint y^2dv = \iiint z^2dv$。因此：

$$\iiint_\Omega x^2dv = \frac{1}{3}\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dv$$

利用球坐标系计算右侧积分：

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^R \rho^2\cdot\rho^2 d\rho = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{R^5}{5} = \frac{4\pi R^5}{5}$$

所以 $\iiint x^2dv = \frac{4\pi R^5}{15}$。代回原式提取公因式：

$$I = \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\frac{4\pi R^5}{15}$$

□

**例题 2.5:** 长方体区域的三重积分　计算三重积分：$I = \iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$。其中 $\Omega: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$。

这道题不太常规，看积分区域，理应用欧氏坐标，但是这样内层积分，得到的过于复杂。

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + C$$

如果直接在直角坐标系下积分，第一步就会产生极其复杂的反正切函数（arctan），后续几乎无从下手。破题的核心在于打破常规：**面对正方体区域，强行使用柱坐标系！** 利用柱坐标多出来的面积微元 $r$ 凑微分，将产生反三角函数的风险扼杀在摇篮里。

**解答**. **第一步：引入柱坐标系与对称性定限**

积分区域为正方体 $\Omega: 0\le x,y,z\le 1$。其在 $xy$ 平面的投影为正方形 $D: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$。在柱坐标系下，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，体积微元 $dv = r\,drd\theta dz$。由于投影区域 $D$ 以及被积函数均关于直线 $y = x$（即 $\theta = \pi/4$）对称，我们可以只计算 $0\le\theta\le\pi/4$ 的下半个三角形区域，并将结果乘以 2。在该下半三角形内，右侧边界为直线 $x = 1$，即 $r\cos\theta = 1 \implies r = \sec\theta$。所以原三重积分化为：

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 dz \int_0^{\sec\theta} \frac{r}{(1+r^2+z^2)^2}dr$$

**第二步：内层积分（通过换元引入有理函数）**

对于内层关于 $r$ 的积分，得益于柱坐标微元提供的 $r$，我们可以使用**换元法（凑微分）**：令 $u = 1+z^2+r^2$，则 $du = 2rdr$。

$$\int_0^{\sec\theta} \frac{r}{(1+z^2+r^2)^2}dr = \left[-\frac{1}{2(1+z^2+r^2)}\right]_0^{\sec\theta} = \frac{1}{2(1+z^2)} - \frac{1}{2(1+z^2+\sec^2\theta)}$$

**【核心眼光】**看到了吗？通过换元引入 $r$，完美避开了直角坐标系下会产生的 arctan，极大地简化了后续计算，这正是本题破局的阵眼！

将内层结果代入，得到：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1\left(\frac{1}{1+z^2}-\frac{1}{1+z^2+\sec^2\theta}\right)dz\triangleq I_1-I_2$$

对于第一部分 $I_1$，变量完全分离，可直接写出答案：

$$I_1=\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta\right)\left(\int_0^1\frac{1}{1+z^2}dz\right)=\frac{\pi}{4}\cdot[\arctan z]_0^1=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{16}$$

**第三步：利用对称性**

对于第二部分，被积函数中含有 $\sec^2\theta$，这强烈暗示我们对 $z$ 进行正切换元！

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}dz=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1\frac{1}{2+\tan^2\theta+z^2}dz$$

令 $z=\tan t$，则 $dz=\sec^2 t\,dt$。当 $z=0$ 时 $t=0$，当 $z=1$ 时 $t=\pi/4$。代入得到：

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 t}{2+\tan^2\theta+\tan^2 t}dtd\theta$$

**【见证奇迹的时刻】**观察这个二重积分，它的积分区域 $[0,\pi/4]\times[0,\pi/4]$ 和分母 $2+\tan^2\theta+\tan^2 t$ 关于变量 $\theta$ 和 $t$ 是**完全对称**的！因此，如果我们交换积分变量 $\theta$ 和 $t$，积分值保持不变：

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{2+\tan^2\theta+\tan^2 t}dtd\theta$$

将两式相加：

$$\begin{aligned}2I_2&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 t+\sec^2\theta}{2+\tan^2\theta+\tan^2 t}dtd\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan^2 t)+(1+\tan^2\theta)}{2+\tan^2\theta+\tan^2 t}dtd\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,dtd\theta=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{16}\end{aligned}$$

所以 $I_2=\frac{\pi^2}{32}$。

**结论：**

$$I=I_1-I_2=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi^2}{32}=\frac{\pi^2}{32}$$

□

这道题第三步想法过于巧妙。

## 3 物理应用

> **例题 3.1:** 重积分物理应用：求质心 在均匀半圆形薄板下接一个宽与直径相同的长方形的均匀薄板，要求质心在圆心处，求圆半径与长方形的高之比。

**解析：**本题考察**质心计算公式**与力矩平衡的物理思想。

**解答**. 设圆半径为 $R$，长方形高为 $h$。建立平面直角坐标系，将半圆心置于原点 $(0,0)$。整个区域 $D$ 由上半平面的半圆 $D_1$ 和下半平面的长方形 $D_2$ 组成。由于图形关于 $y$ 轴对称，整个物体的质心横坐标 $\bar{x}=0$。题目要求整体质心在圆心，即 $\bar{y}=0$。根据组合图形质心公式（或静力矩公式）：

$$S_1\bar{y}_1+S_2\bar{y}_2=0$$

- **半圆部分 $\mathbf{D_1}$：** 面积 $S_1=\frac{1}{2}\pi R^2$。静力矩 $M_{x1}=\iint_{D_1} y\,dxdy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^R r\sin\theta\cdot rdr=[-\cos\theta]_0^{\pi}\cdot\frac{1}{3}R^3=\frac{2}{3}R^3$。其质心 $\bar{y}_1=\frac{M_{x1}}{S_1}=\frac{4R}{3\pi}$。
- **长方形部分 $\mathbf{D_2}$：** 宽度为直径 $2R$，高为 $h$。由于它在 $y$ 轴下方，面积 $S_2=2Rh$，由对称性知其质心在几何中心，即 $\bar{y}_2=-\frac{h}{2}$。

代入力矩平衡方程：

$$\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right)\left(\frac{4R}{3\pi}\right)+(2Rh)\left(-\frac{h}{2}\right)=0\implies\frac{2}{3}R^3-Rh^2=0$$

消去 $R$（$R\neq0$），得到 $h^2=\frac{2}{3}R^2$。因此，圆半径与长方形高之比为：

$$\frac{R}{h}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

□

**例题 3.2: 重积分物理应用：求引力** 求半径为 $R$，半顶角为 $\alpha$，密度为 $\rho_0$ 的均匀球锥体对顶点处单位质点的引力。

**解析：** 这是三重积分最经典的物理应用题之一——求引力，注意利用对称性，直接得到这个合力的方向，在积分时对每个微元的力直接投影到这个方向上。

**解答**. 为了方便定限，以顶点为坐标原点，建立球坐标系，使球锥体的对称轴落在 $z$ 轴正半轴上。积分区域 $\Omega$ 的极坐标表示为：$0\le\theta\le2\pi$，$0\le\varphi\le\alpha$，$0\le r\le R$。由于体密度 $\rho_0$ 是均匀的，根据对称性，除了 $z$ 轴方向的引力外，另外两个方向的引力分量相互抵消（即 $F_x=0,F_y=0$）。

在球内任取微元 $dv$，其质量为 $dm=\rho_0dv$。它对原点处单位质量的质点产生的引力大小为 $dF=G\frac{dm}{r^2}$。该力在 $z$ 轴上的投影（分量）为 $dF_z=G\frac{\rho_0dv}{r^2}\cos\varphi$。运用球坐标进行三重积分计算总引力 $F_z$：

$$\begin{aligned}F_z&=\iiint_{\Omega}G\rho_0\frac{\cos\varphi}{r^2}(r^2\sin\varphi\,drd\varphi d\theta)\\&=G\rho_0\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\alpha}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^R dr\\&=G\rho_0(2\pi)\left(\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)(R)\\&=\pi G\rho_0R\sin^2\alpha\end{aligned}$$

**结论：** 该球锥体对顶点处单位质点的引力大小为 $\pi G\rho_0R\sin^2\alpha$，方向沿对称轴指向物体内部。□