曲线曲面积分讲义

秦加俊

2026 年 3 月 28 日

1　微积分基本定理的高维形式

微积分基本定理的核心，是将**边界上的低维积分**（全量/取值差（0 维）、环流/做功（1 维）或通量（2 维）），转化为**内部的高维积分**（某种导数或算子的累积）。将低维写在左侧，更能深刻体现算子在空间内部的作用机制。

我们首先来看一维线段与二维平面区域上的情形：

知识 1.1: 微积分基本定理的高维统一（上）：一维与二维

空间	核心公式（低维边界积分 ＝ 高维内部积分）	算子与意义
一维	**【0 维边界 → 1 维内部】牛顿-莱布尼茨公式** $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\,dx$	**一阶导数：** $f'(x)$ 边界端点值之差，等于内部导数的累积。
二维	**【0 维边界 → 1 维内部】线积分基本定理** $f(B)-f(A)=\int_L \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=\int_L \nabla f\cdot d\mathbf{r}$	**二维梯度：** ∇f 起止势能差，等于内部梯度的路径累积。
	【1 维边界 → 2 维内部】格林公式 $$\oint_{\partial D} P\,dx+Q\,dy=\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dxdy$$	**二维旋度：curl F** 边界宏观环流量，等于内部微观旋涡之和。

当我们将空间的维度提升到三维时，内部的积分区域变成了空间曲线、空间曲面与空间体，行列式形式不仅方便记忆，更揭示了算子的代数结构：

知识 1.2: 微积分基本定理的高维统一（下）：三维空间

空间	核心公式（低维边界积分 ＝ 高维内部积分）	算子与意义
三维	**【0 维边界 → 1 维内部】线积分基本定理** $f(B)-f(A)=\int_L \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=\int_L \nabla f\cdot d\mathbf{r}$	**三维梯度：∇f** 空间起止势能差，等于内部梯度的路径累积。
	【1 维边界 → 2 维内部】斯托克斯公式 向量：$\oint_{\partial\Sigma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_\Sigma(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$ 坐标： $\oint_{\partial\Sigma}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$	**旋度：$\nabla\times\mathbf{F}$** 边界宏观环流量，等于空间曲面上旋度的总通量。
	【2 维边界 → 3 维内部】高斯公式 向量： $\oiint_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iiint_\Omega(\nabla\cdot\mathbf{F})dV$ 坐标： $\oiint_{\partial\Omega}P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$ $=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$	**散度：$\nabla\cdot\mathbf{F}$** 穿出封闭边界的通量，等于内部源/汇的散度总和。

所有的微积分基本定理都可以用一个极其优美、极度简洁的公式来概括——**广义斯托克斯公式**：

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}d\omega$$

我们并不要求多理解这个式子，但要知道在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中，对于积分维数之间的转换（0 维到 1 维，1 维到 2 维，2 维到 3 维），抽象的外微分算子 d 的具像化是什么，d 化身为了我们熟悉的**梯度**、**旋度**和**散度**。

我们将这三个核心公式的等号"对齐"，大家可以直观地看到，算子是如何将"边界积分"和"内部积分"无缝连接起来的：

知识 1.3: 外微分 d 与其在三维空间中的具像化

三维空间算子	$\int_{\partial\Omega}\omega$	$=$	$\int_{\Omega}d\omega$	
梯度 (∇f)	$f(B)-f(A)$	$=$	$\int_L \nabla f\cdot d\mathbf{r}$	(线积分基本定理)
旋度 $(\nabla\times\mathbf{F})$	$\oint_{\partial\Sigma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$	$=$	$\iint_{\Sigma}(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$	(斯托克斯公式)
散度 $(\nabla\cdot\mathbf{F})$	$\oiint_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$	$=$	$\iiint_{\Omega}(\nabla\cdot\mathbf{F})dV$	(高斯公式)

为了行文的连贯性，二维情形的对应我们统一在最后的例题中说明。

1.1 外微分的两大重要性质

为什么我们要费尽心思引入这个抽象的外微分算子 d，除了可以帮我们写出一个统一的微积分基本定理的表达式以外，还有就是外微分算子有两个重要性质，通过记忆这两个重要性质，我们可以得到对于梯度，旋度，散度这些具体算子性质的统一理解。

知识 1.4: 外微分 d 的两大性质

一、$\mathbf{d^2=0}$

外微分算子有一个最根本的代数性质：$\mathbf{d^2=d\circ d=0}$（连续求两次外微分必然为零）。其深刻的几何背景是 **"边界的边界为空"**（$\partial\circ\partial=0$），即任何封闭区域的边界本身是没有边缘的。

三维微积分中的三大算子构成了如下的微分序列：

$$\text{标量函数}\xrightarrow{d\ (\text{梯度}\nabla)}\text{向量场}\xrightarrow{d\ (\text{旋度}\nabla\times)}\text{向量场}\xrightarrow{d\ (\text{散度}\nabla\cdot)}\text{标量函数}$$

根据 $d^2=0$，序列中任意连续走两步的结果必然为零，由此我们瞬间秒杀了两个核心的恒等式：

- **梯度的旋度为零（保守场无旋）：** $d(df)=0 \implies \nabla\times(\nabla f)=\mathbf{0}$
- **旋度的散度为零（旋涡场无源）：** $d(d\mathbf{F})=0 \implies \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$

二、庞加莱引理：性质一反过来成立的条件

既然"梯度场的旋度必为零"，那么"无旋场就一定是某个函数的梯度场吗"？**庞加莱引理**给出了回答，但必须加上一个极其关键的**条件**：

在**单连通区域**（区域没有"洞"）内：

- **无旋必保守**：如果 $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$，则必然存在标量函数 f，使得 $\mathbf{F}=\nabla f$。这正是我们求解全微分、判断积分**与路径无关**的理论基础。
- 如果 $\nabla\cdot\mathbf{F}=0$，则必然存在向量场 $\mathbf{A}$，使得 $\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{A}$。

【注意】如果区域存在"洞"或者奇点，庞加莱引理就会**失效**！这就是为什么遇到奇点时，即使偏导数相等，我们也不能直接说它与路径无关，必须通过"挖洞法"去单独处理。

以上是一般的理论，实际我们可以对一些具体的情形计算验证一下 $d^2=0$。

例题 1.1: 算子恒等式的验证　设标量函数 $f(x,y,z)$ 和向量场 $\mathbf{F}(x,y,z)=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ 均具有连续的二阶偏导数。请用坐标展开的形式验证，由外微分性质 $d^2=0$ 导出的两个核心恒等式：

(1) **梯度的旋度恒为零向量：** $\nabla\times(\nabla f)=\mathbf{0}$

(2) **旋度的散度恒为零：** $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$

解答. 这两个恒等式的微积分本质，其实正是我们非常熟悉的**"二阶混合偏导数相等"**。

(1) 验证 $\nabla\times(\nabla f)=\mathbf{0}$

首先写出梯度向量场：$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$。对该场求旋度，列出行列式并展开：

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla f) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\right)\mathbf{i}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

由于 f 的二阶混合偏导数连续，括号内的三项全为 0，结果为 $\mathbf{0}$。

(2) 验证 $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$

首先写出 $\mathbf{F}$ 的旋度向量：

$$\nabla\times\mathbf{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

对这个新的向量场求散度（即分别对 x,y,z 求导并相加），为了看的更清楚，我们将求导后的各项按字母 P,Q,R 重新分组配对：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\\&=\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}\right)\end{aligned}$$

同样，因为混合偏导数相等，每一对括号内的项都“精准”地相互抵消，最终结果为 0。

【教学小结】所谓 $d^2=0$，在经典微积分的坐标系计算中，无非就是由于算子的反对称性（如叉乘、外积）与偏导数的对称性发生了完美的碰撞！ □

1.2 外微分在二维平面上的具象化

现在我们来到二维平面 $\mathbb{R}^2$。在平面上，让我们来看看那三个极其抽象的高维结论（微积分基本定理，$d^2=0$，庞加莱引理），（三个关于外微分 d 的一般结论的证明当然是不做要求的，但需要知道具体的对应）是如何变成我们最熟悉的高数 B 考点的。

> **例题 1.2:** 二维具象化 **问题：**在二维平面上，写出外微分的具体对应算子和 $d^2=0$ 对应的结论，直接计算验证这个结论。

解答. 二维微积分中的算子构成了如下的微分序列（由于二维情形序列比三维短了一步）：

$$\text{标量函数}f(x,y)\xrightarrow{d\left(\text{二维梯度}\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right)}\text{平面向量场}\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}\xrightarrow{d\left(\text{二维旋度curl }\mathbf{F}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)}\text{标量函数}$$

根据 $d^2=0$，在这个序列中连续走两步的结果必然为零。由于序列变短，我们只能走出一次“连续两步”，由此写出了二维空间中最核心的恒等式：

- **二维梯度的旋度为零（保守场无旋）：**

$$d(df)=0\implies\mathrm{curl}(\nabla f)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\equiv 0$$

结论： $d^2=0$ 在二维标量场上的具象化，就是微积分中**二阶混合偏导数对称性**！同时也证明了“梯度场必定是无旋场”。 □

例题 1.3: 二维具象化：庞加莱引理 $\implies$ 积分与路径无关 **问题：** 庞加莱引理在二维情形下，是什么？

解答. 二维庞加莱引理完全等价于我们熟知的内容：

"在平面无洞区域内，若 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，则 $P\,dx+Q\,dy$ 必为全微分。"

它为我们做题时"判断积分与路径无关"以及"凑全微分求势能"提供了最坚实的数学保障！ □

例题 1.4: 二维庞加莱引理实战演练

验证平面向量场 $\mathbf{F}(x,y)=(2xy+e^x)\mathbf{i}+(x^2+\cos y)\mathbf{j}$ 是保守场，并求出其所有的势函数 $u(x,y)$。

解答. **第一步：验证条件（触发庞加莱引理）** 首先，该向量场的定义域为整个二维平面 $\mathbb{R}^2$，显然是没有"洞"的**单连通区域**。其次，记 $P(x,y)=2xy+e^x$，$Q(x,y)=x^2+\cos y$。计算它们的交叉偏导数：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x$$

因为 $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以该向量场是无旋场。满足这两个条件后，根据**庞加莱引理**，该向量场必为保守场，即必然存在势函数 $u(x,y)$。这为我们接下来的求解提供了理论保底。

第二步：求解势函数（凑全微分法） 既然确信势函数存在，我们就可以将向量场写成微分形式，并通过"凑微分"的方法将其彻底还原：

$$\begin{aligned} du &= P\,dx+Q\,dy \\ &= (2xy+e^x)\,dx+(x^2+\cos y)\,dy \end{aligned}$$

我们将各项重新组合，把含有相同变量交织的项强行"绑定"在一起：

$$\begin{aligned} du &= (2xy\,dx+x^2\,dy)+e^x\,dx+\cos y\,dy \\ &= d(x^2y)+d(e^x)+d(\sin y) \\ &= d(x^2y+e^x+\sin y) \end{aligned}$$

由于整体是一个全微分，我们直接脱去外层的微分符号 d，得到最终的势函数：

$$u(x,y)=x^2y+e^x+\sin y+C$$

（其中 C 为任意常数，代表任意一点的基准势能）。 □

2 整体带入与自由选取路径

在处理曲线积分时，切忌一上来就死算参数方程。我们应该优先观察被积函数的结构与积分路径的几何特征，灵活运用整体代入、格林公式、路径变形以及全微分配凑等技巧。

2.1 整体带入法

曲线曲面上的点自然满足一些约束关系，将这个关系直接带入到被积函数，将大大简化微积分基本定理的计算。

例题 2.1: 整体代入法与区域对称性 求曲线积分 $\oint_C e^{-(x^2+y^2)}[\cos(2xy)\,dx+\sin(2xy)\,dy]$ 的值，其中 C 是单位圆周 $x^2+y^2=1$，方向为逆时针。

解答. **第一步：观察路径特征，整体代入**。由于积分路径 C 的方程恰好为 $x^2+y^2=1$，因此在曲线 C 上的任意一点，被积函数中的 $e^{-(x^2+y^2)}$ 都是一个常数 e^{-1}。我们可以将其直接作为一个整体常数提取到积分号外面：

$$I=\frac{1}{e}\oint_C \cos(2xy)\,dx+\sin(2xy)\,dy$$

第二步：运用格林公式。此时，设 $P=\cos(2xy)$，$Q=\sin(2xy)$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2y\cos(2xy),\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin(2xy)$$

根据格林公式：

$$I=\frac{1}{e}\iint_D\left(2y\cos(2xy)-(-2x\sin(2xy))\right)dxdy=\frac{2}{e}\iint_D\big(y\cos(2xy)+x\sin(2xy)\big)dxdy$$

第三步：利用对称性化简重积分。观察被积函数 $f(x,y)=y\cos(2xy)+x\sin(2xy)$。

这里有很多对称性，可以考虑关于原点的对称性，将 (x,y) 替换为 $(-x,-y)$，我们有：

$$f(-x,-y)=(-y)\cos(2xy)+(-x)\sin(2xy)=-f(x,y)$$

可见被积函数是关于原点的奇函数。

而积分区域 D（单位圆盘）关于原点完全对称，因此该二重积分的值为 0。故原曲线积分 $I=0$。

也可以单独看关于 x 的对称性，y 的对称性，就是寻找奇函数。

□

例题 2.2: 整体代入 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长为 a，求 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)ds$。

解析：这是一道极其巧妙的第一类曲线积分题。它完美地考察了两个核心考点：**利用对称性消去奇函数项**与 **利用曲线方程进行整体代入**。如果试图硬算参数方程，将会因为椭圆周长无法用初等函数表示而陷入死胡同。

解答. **第一步：利用对称性消去奇函数项**

积分路径 $L:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 是一个中心在原点的标准椭圆，它关于 x 轴、y 轴均完美对称。观察被积函数中的交叉项 $f(x,y)=2xy$：它关于 x 是奇函数（$f(-x,y)=-f(x,y)$），且关于 y 也是

奇函数。根据第一类曲线积分的对称性性质，奇函数在关于对应坐标轴对称的曲线上积分为 0，即：

$$\oint_L 2xy\,ds = 0$$

原积分瞬间化简为：

$$I = \oint_L (3x^2 + 4y^2)ds$$

第二步：利用曲线方程整体代入

对于剩下的被积函数 $3x^2 + 4y^2$，我们观察它与积分路径 L 的关系。将椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的两边同时乘以 12，进行通分：

$$3x^2 + 4y^2 = 12$$

【注意】在计算第一类曲线/曲面积分时，被积函数中的点 (x, y) 始终位于给定的曲线/曲面上。因此，**曲线方程本身就是天然的约束条件，可以直接代入被积函数中进行化简！**由于在曲线 L 上，$3x^2 + 4y^2$ 恒等于常数 12，我们将其整体代入积分式中：

$$I = \oint_L 12\,ds = 12\oint_L ds$$

第三步：利用几何意义得出结论

根据第一类曲线积分的几何意义，$\oint_L 1\,ds$ 表示闭合曲线 L 的总弧长（即周长）。题目已知该椭圆的周长为 a，所以：

$$\oint_L ds = a$$

最终结果为：

$$I = 12a$$

□

2.2 经典情形：函数在一点奇异

函数在区域内部不能满足格林公式的使用条件，这种情况绝大多数都是函数出现分母为 0 的情形，所以要注意分母零点和区域的关系。

例题 2.3: 含奇点曲线积分的路径变形（挖洞法） 计算 $I_1 = \oint_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$ 和 $I_2 = \oint_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + 4y^2}$，其中 L 分别为：

(1) 椭圆 $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ 所围区域的正向边界；

(2) 单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 所围区域的正向边界。

解答. 无论对于 I_1 还是 I_2，分子都是典型的 $x\,dy - y\,dx$。我们先检查被积函数是否满足格林公式的条件（即 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$）。以 I_2 为例，设 $P = \frac{-y}{x^2+4y^2}, Q = \frac{x}{x^2+4y^2}$：

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1 \cdot (x^2 + 4y^2) - x(2x)}{(x^2 + 4y^2)^2} = \frac{4y^2 - x^2}{(x^2 + 4y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-1\cdot(x^2+4y^2)-(-y)(8y)}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{4y^2-x^2}{(x^2+4y^2)^2}$$

二者相等！同理对 I_1 也有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$。但是注意：它们在原点 $(0,0)$ 处分母为零，也就是存在**奇点**。能否用格林公式，取决于曲线内部是否包围了奇点。

(1)：曲线不包围奇点

椭圆 $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$ 的中心在 $(2,0)$，其最左端的点为 $(2-\sqrt{2},0)$，显然大于 0。因此原点 $(0,0)$ 在椭圆的**外部**。曲线 L 内部处处光滑，直接由格林公式得出：

$$I_1=0,\quad I_2=0.$$

(2)：曲线包围奇点，自由变形路径，为了整体带入

单位圆 $L:x^2+y^2=1$ 的内部包含了奇点 $(0,0)$，不能直接使用格林公式。

- **计算** I_1：因为积分路径恰好是 $x^2+y^2=1$，我们可以像例 1 那样直接**整体代入**分母。

$$I_1=\oint_L\frac{x\,dy-y\,dx}{1}=2\iint_D 1\,dxdy=2\times(\text{单位圆面积})=2\pi$$

- **计算** I_2：此时分母是 x^2+4y^2，无法直接在 L 上整体代入。但由于 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，根据路径无关原理，我们可以在包围奇点的区域内**自由改变积分路径**，只要不穿过奇点即可。我们故意构造一个新的内侧正向椭圆 $l:x^2+4y^2=\varepsilon^2$。为了计算方便，不妨直接取 $l:x^2+4y^2=1$。沿此新路径积分，分母整体代入为 1：

$$I_2=\oint_l\frac{x\,dy-y\,dx}{1}=\iint_{D_l}\left(\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)dxdy=2\iint_{D_l}dxdy$$

椭圆 $x^2+\frac{y^2}{(1/2)^2}=1$ 的面积为 $\pi\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$。因此 $I_2=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$。

□

2.3 自己选路径

例题 2.4: 曲线积分与路径无关及凑全微分　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d)。记

$$I=\int_L\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\,dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\,dy$$

(1) 证明曲线积分与路径无关；

(2) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值。

证明. **(1) 证明与路径无关：** 设 $P=\frac{1}{y}+yf(xy)$，$Q=xf(xy)-\frac{x}{y^2}$。我们分别求交叉偏导数：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}+f(xy)+y\cdot xf'(xy)=-\frac{1}{y^2}+f(xy)+xyf'(xy)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = f(xy) + x \cdot y f'(xy) - \frac{1}{y^2} = f(xy) + xy f'(xy) - \frac{1}{y^2}$$

显然 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$。又因为曲线 L 完全位于上半平面 $y > 0$ 内，该区域是单连通的（避开了 $y = 0$ 的奇点）。因此，该曲线积分在给定的上半平面内与路径无关。 □

解答.【解法一：特殊路径选取与整体代入】

既然第一问已经证明了积分与路径无关，我们就可以在区域内**自由选取**一条从 (a, b) 到 (c, d) 的简单路径。

已知条件极其特殊：$ab = cd$。这意味着起点和终点恰好都位于同一条双曲线 $xy = ab$ （或记作 $xy = k$）的同一分支上（因为 $y > 0$）。因此，我们果断选取双曲线段 $L' : xy = ab$ 作为积分路径。

在这条路径上，我们可以运用**整体代入法**：

- $xy \equiv ab$，因此未知函数变成常数：$f(xy) \equiv f(ab)$；
- $y = \frac{ab}{x}$，对其求微分得到 $dy = -\frac{ab}{x^2}\,dx$。

将它们整体代入原积分式，将线积分化为关于 x 的一元定积分：

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^c \left\{ \frac{1}{\frac{ab}{x}} \left[1 + \left(\frac{ab}{x}\right)^2 f(ab) \right] + \frac{x}{\left(\frac{ab}{x}\right)^2} \left[\left(\frac{ab}{x}\right)^2 f(ab) - 1 \right] \left(-\frac{ab}{x^2} \right) \right\} dx \\
&= \int_a^c \left\{ \left[\frac{x}{ab} + \frac{ab}{x} f(ab) \right] + \frac{x^3}{(ab)^2} \left[\frac{(ab)^2}{x^2} f(ab) - 1 \right] \left(-\frac{ab}{x^2} \right) \right\} dx \\
&= \int_a^c \left\{ \left[\frac{x}{ab} + \frac{ab}{x} f(ab) \right] - \frac{x}{ab} \left[\frac{(ab)^2}{x^2} f(ab) - 1 \right] \right\} dx \\
&= \int_a^c \left\{ \frac{x}{ab} + \frac{ab}{x} f(ab) - \frac{ab}{x} f(ab) + \frac{x}{ab} \right\} dx
\end{aligned}$$

神奇的事情发生了！含有未知函数 $f(ab)$ 的项完全抵消，被积函数变得极其简单：

$$I = \int_a^c \frac{2x}{ab}\,dx = \left[\frac{x^2}{ab} \right]_a^c = \frac{c^2 - a^2}{ab} = \frac{c^2}{ab} - \frac{a^2}{ab}$$

最后，利用题设条件 $ab = cd$，对第一项的分母进行替换：

$$I = \frac{c^2}{cd} - \frac{a^2}{ab} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$$

结果与全微分法完全一致。

【解法二：凑全微分，找原函数】既然积分与路径无关，说明被积表达式是一个**全微分**。我们可以通过分组凑微分法求出它的原函数（势函数）$u(x, y)$。将原积分式展开并重新组合：

$$\begin{aligned}
P\,dx + Q\,dy &= \left(\frac{1}{y} + y f(xy) \right) dx + \left(x f(xy) - \frac{x}{y^2} \right) dy \\
&= \left(\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy \right) + f(xy)(y\,dx + x\,dy) \\
&= d\left(\frac{x}{y}\right) + f(xy)\,d(xy)
\end{aligned}$$

这表明原函数为 $u(x,y)=\frac{x}{y}+\int_0^{xy} f(t)\,dt$。由于积分与路径无关，其值只取决于终点 (c,d) 和起点 (a,b)：

$$\begin{aligned} I &= u(c,d)-u(a,b) \\ &= \left(\frac{c}{d}+\int_0^{cd} f(t)\,dt\right)-\left(\frac{a}{b}+\int_0^{ab} f(t)\,dt\right) \end{aligned}$$

由于题目已知 $ab=cd$，因此 $\int_0^{cd} f(t)\,dt=\int_0^{ab} f(t)\,dt$，两项相互抵消。最终结果为：

$$I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{bd}$$

□

2.4　附录

知识 2.1: 几何体的维度判定：方程约束与自由度

在多元微积分中，几何形体（曲线或曲面）往往通过方程来定义。判断一个几何形体究竟是几维的，核心在于理解 **"自由度"** 的概念：

对象的维度（自由度） = 所在空间的维度 − 独立约束方程的个数

每一次增加一个方程约束，就相当于"降了一维"。具体对应关系如下：

所在空间	约束方程	几何形体	维度计算（自由度）	典型示例
二维平面	1 个　$F(x,y)=0$	**平面曲线** (Curve)	$2-1=\mathbf{1}$ (一维对象)	$x^2+y^2=1$ (平面上的单位圆)
三维空间	1 个　$F(x,y,z)=0$	**空间曲面** (Surface)	$3-1=\mathbf{2}$ (二维对象)	$x^2+y^2+z^2=1$ (三维空间中的球面)
三维空间	2 个 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$	**空间曲线** (Curve)	$3-2=\mathbf{1}$ (一维对象)	$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\z=0\end{cases}$ (球面与平面的交线：圆)

注意：

- **参数化的本质：** 几维的对象，就需要几个参数来描述。例如空间曲面是二维的，参数化时就需要 u,v 两个参数（如球坐标的 θ,φ）；空间曲线是一维的，只需要 t 一个参数。
- **空间曲线的来源：** 在三维空间中，单看一个方程 $F=0$ 永远是曲面。空间曲线本质上是**两个空间曲面的交线**（即同时满足两个方程）。

3 曲线曲面积分常规计算

知识 3.1: 曲线积分参数化

设曲线 L 的参数方程为 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$，$t \in [\alpha, \beta]$:

- **第一类曲线积分（对弧长）**
  微元替换：$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$

$$\int_L f(x,y,z)\, ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

- **第二类曲线积分（对坐标）**
  微元替换：直接求导 $dx = x'(t)dt, dy = y'(t)dt, dz = z'(t)dt$

$$\int_L P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \int_{t_{\text{起点}}}^{t_{\text{终点}}} \left[Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right] dt$$

知识 3.2: 曲面积分

- **第一类曲面积分（对面积）——情形 1：显式方程**
  设曲面 Σ 为 $z = z(x, y)$，投影区域为 D_{xy}：
  微元替换：$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\, dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x,y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$$

- **第一类曲面积分（对面积）——情形 2：一般参数方程**
  设曲面 Σ 的参数方程为 $\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$，$(u,v) \in D_{uv}$：
  微元替换：利用曲面的第一基本形式，面积微元 $dS = \sqrt{EG - F^2}\, dudv$

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\, dS = \iint_{D_{uv}} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

  注：这里的 E, F, G 为曲面的第一基本量，由切向量的点乘给出：

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

  $\sqrt{EG - F^2}$ 就是法向量的模长 $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$，

- **第二类曲面积分（对坐标）**
  微元替换：将 $z = z(x,y)$ 强制代入，微元直接化为投影面微元 $dxdy$

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)\, dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x,y))\, dxdy$$

注意正负号：若曲面 Σ 取"上侧"（法向量与 z 轴夹角为锐角），取正号；取"下侧"则取负号。

知识 3.3: 曲线与曲面积分的一般计算步骤

曲线和曲面积分的核心思想是：**"参数化"**，将它们转化为我们熟悉的定积分或二重积分。拿到题目，请遵循"先整体判断，后局部计算"的原则：

Step 1. 判断是否"闭合"？(能否用微积分基本定理)

做题前先观察积分路径/曲面是否封闭。

- 如果**封闭**：立刻检查是否能用 **格林公式**（2D 曲线）、**高斯公式**（3D 曲面）或 **斯托克斯公式**（3D 曲线）。这是最快解法！
- 如果**不封闭**：思考能否"补线/补面"凑成封闭区域，用完公式后再减去补上去那部分的积分。

Step 2. 判断是否"与路径无关"？(全微分方程)

对于第二类曲线积分 $\int Pdx + Qdy$，若 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$，说明积分与路径无关。

可以直接凑全微分，找原函数，或者自己选取最佳的积分路径（方便整体带入）进行计算。

Step 3. 老老实实"一投、二代、三计算"

如果不能用公式，就直接参数化：

- **参数化/投影（投）**：将曲线写成参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，或将曲面 Σ 投影到某个坐标面上得到区域 D_{xy}，并写出曲面方程 $z = z(x, y)$。
- **代换化简（代）**：把参数方程或曲面方程代入被积函数。对于第一类积分，换算弧长/面积微元（如 $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy$）；对于第二类积分，直接求导代入（如 $dz = z_x dx + z_y dy$）。
- **定限与正负号（算）**：对于带方向的积分（第二类），注意参数 t 必须是**从起点到终点**；曲面积分必须根据法向量的指向（如"上侧"取正）来决定正负号。