

# 多元积分讲义

秦加俊

2026 年 4 月 11 日

**例题 0.1:** 全微分的巧妙配凑 求微分方程  $\sin x \sin 2y dx - 2 \cos x \cos 2y dy = 0$  的通解。

**【解析】** 这道题是一道极其经典的微分方程求解题。

大家还没有学到常微分方程，但是现在知识就已经可以去理解这个式子在说什么了，左边就是第二型曲线积分，然后这个积分为 0，那它一定是沿着一个特别的路径积分为 0，这条路径画出来就是一个曲线，也就是方程的解。

我们把原函数找到，自然原函数在这条路径上就始终为常值，所以这一题是在考察你凑微分。

**解答.** 将原方程各项凑微分：已知  $\sin x dx = -d(\cos x)$ ，且  $2 \cos 2y dy = d(\sin 2y)$ 。代入原方程得到：

$$-\sin 2y d(\cos x) - \cos x d(\sin 2y) = 0$$

提取负号，利用乘积的微分公式  $d(uv) = u dv + v du$ ：

$$-\left[ \sin 2y d(\cos x) + \cos x d(\sin 2y) \right] = 0$$

即：

$$d(\cos x \sin 2y) = 0$$

两边同时积分，得到通解：

$$\cos x \sin 2y = C$$

(其中  $C$  为任意常数)

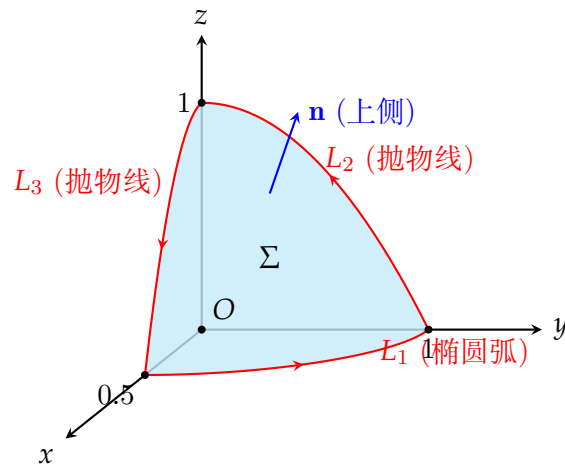
□

我原以为曲线曲面积分和常微分方程毫无关系，居然还是有点关系的。

## 1 三维空间中的曲线积分

**例题 1.1:** 斯托克斯公式与直接线积分 已知  $\Sigma$  为曲面  $4x^2 + y^2 + z = 1 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$  的上侧， $L$  为  $\Sigma$  的边界曲线，其正向与  $\Sigma$  的正法向量满足右手法则，计算曲线积分

$$I = \oint_L (yz^2 - \cos z) dx + 2xz^2 dy + (2xyz + x \sin z) dz$$



**【解析】** 本题要求计算封闭曲线上的空间积分，条件给出了“曲面及其边界”，并且明确了“右手法则”，这是非常典型的斯托克斯公式 (Stokes' Theorem) 的信号。通过计算向量场的旋度转化为曲面积分即可。

这道题三个曲线积分都正好在降一维的平面上，直接计算曲线积分其实很好算。

### 解答. 【解法一：直接算】

边界曲线  $L$  位于第一卦限，由三段分别在坐标平面上的曲线段组成。根据右手法则，沿着  $L$  的方向依次为：

- (1)  $L_1$  (位于  $xy$  平面)：从  $(1/2, 0, 0)$  到  $(0, 1, 0)$ 。此时  $z = 0 \implies dz = 0$ 。代入积分式，被积函数仅剩  $P dx = -\cos 0 dx = -dx$ 。

$$\int_{L_1} -dx = -(0 - 1/2) = 1/2$$

- (2)  $L_2$  (位于  $yz$  平面)：从  $(0, 1, 0)$  到  $(0, 0, 1)$ 。此时  $x = 0 \implies dx = 0$ 。代入积分式，被积函数全部清零 ( $Q dy = 0$  且  $R dz = 0$ )。

$$\int_{L_2} 0 = 0$$

- (3)  $L_3$  (位于  $xz$  平面)：从  $(0, 0, 1)$  到  $(1/2, 0, 0)$ 。此时  $y = 0 \implies dy = 0$ 。代入积分式：

$$\int_{L_3} -\cos z dx + x \sin z dz = \int_{L_3} d(-x \cos z) = [-x \cos z]_{(0,0,1)}^{(1/2,0,0)} = \left(-\frac{1}{2} \cdot 1\right) - 0 = -\frac{1}{2}$$

三段相加即可得到最终结果：

$$I = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0$$

### 【解法二：利用斯托克斯公式】

设  $\mathbf{F} = (yz^2 - \cos z, 2xz^2, 2xyz + x \sin z)$ 。计算其旋度：

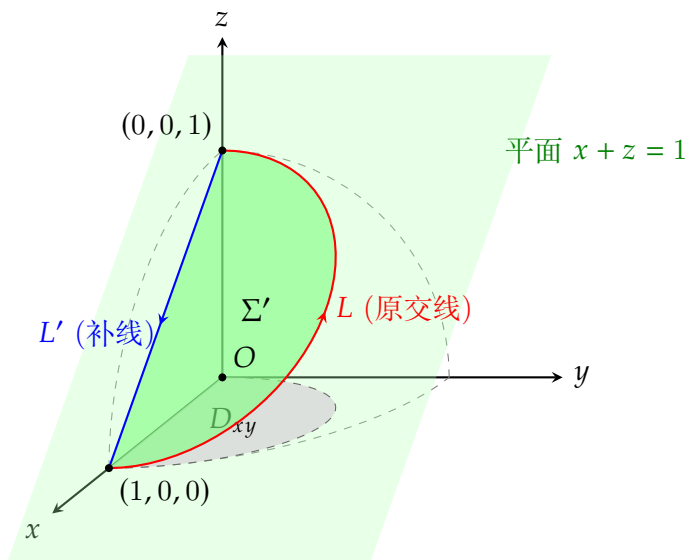
$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz^2 - \cos z & 2xz^2 & 2xyz + x \sin z \end{vmatrix} = (-2xz, 0, z^2)$$

由于  $\Sigma$  取上侧, 将曲面方程写为  $z = 1 - 4x^2 - y^2$ , 面积法向量微元为  $d\mathbf{S} = (-z_x, -z_y, 1)dxdy = (8x, 2y, 1)dxdy$ . 投影区域  $D_{xy}$  为  $4x^2 + y^2 \leq 1$  在第一象限的部分。

$$I = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{D_{xy}} (-16x^2z + z^2) dx dy$$

将  $z = 1 - 4x^2 - y^2$  代入后积分, 多项式展开计算即可验证  $I = 0$ .  $\square$

**例题 1.2:** 空间开口曲线的补线构造与斯托克斯公式 计算曲线积分  $\int_L y dx + z dy + x dz$ , 其中  $L$  是曲线  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  从点  $(1, 0, 0)$  到  $(0, 0, 1)$ 。



**【评述】** 这是一道极其经典的“开口曲线求积分”问题。题干给出的路径是空间球面与平面的交线, 参数方程表达式并不容易写 (一般先在平面上写好圆的方程, 再空间旋转过来, 太麻烦)。

破题的核心在于“补线闭合”: 既然起点和终点都在  $y = 0$  的平面上, 我们只需用一条直线段把它们连起来, 强行凑成一个封闭回路!

这样就能借用斯托克斯公式, 将问题化为一个简单的曲线积分计算和一个简单的曲面积分计算。

**解答. 第一步: 补线凑封闭回路**

增加一条从终点  $(0, 0, 1)$  直达起点  $(1, 0, 0)$  的直线段  $L'$ 。注意  $L'$  完全落在  $y = 0$  的坐标平面上, 且满足方程  $x + z = 1$ 。在  $L'$  上, 由于  $y = 0 \implies dy = 0$ , 且  $z = 1 - x \implies dz = -dx$ 。在此补线上的积分为:

$$\int_{L'} y dx + z dy + x dz = \int_0^1 x(-dx) = \left[ -\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

**第二步：应用斯托克斯公式**

设封闭曲线  $L \cup L'$  围成的平面区域为  $\Sigma$ ，它完全位于平面  $x+z=1$  上。向量场  $\mathbf{F}=(y, z, x)$  的旋度为：

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1, -1, -1)$$

平面  $z=1-x$  的上侧法向量微元(符合从  $x$  轴走向  $z$  轴的右手法则方向)为  $d\mathbf{S} = (-z_x, -z_y, 1)dxdy = (1, 0, 1)dxdy$ 。斯托克斯公式的曲面积分为：

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{D_{xy}} (-1, -1, -1) \cdot (1, 0, 1) dxdy = \iint_{D_{xy}} -2 dxdy$$

**第三步：计算投影区域面积**

投影区域  $D_{xy}$  是空间交线在  $xy$  平面的投影。联立方程消去  $z$ ：

$$x^2 + y^2 + (1-x)^2 = 1 \implies 2x^2 - 2x + y^2 = 0 \implies 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

化为标准椭圆方程： $\frac{(x-1/2)^2}{(1/2)^2} + \frac{y^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1$ 。由于题设定  $y \geq 0$ ，投影区域  $D_{xy}$  实际上是一个半椭圆。半椭圆的面积为  $S_D = \frac{1}{2}\pi ab = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$ 。所以，回路的闭合积分为：

$$\iint_{\Sigma} -2 dxdy = -2 \times \frac{\sqrt{2}\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

**第四步：得出原积分**

根据闭合回路积分的可加性  $\int_L + \int_{L'} = \iint_{\Sigma}$ ，我们有：

$$\int_L = \iint_{\Sigma} - \int_{L'} = -\frac{\sqrt{2}\pi}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

□

**例题 1.3: 空间闭曲线的斯托克斯公式与方向判定** 求力  $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$  沿有向闭曲线  $\Gamma$  所做的功，其中  $\Gamma$  为平面  $x+y+z=1$  被三个坐标面所截成的三角形的整个边界，从  $z$  轴正向看去，沿顺时针方向。

**【解析】** 看到“力沿闭合曲线做功”，第一反应是**斯托克斯公式**。

由于恰好都是平面曲线，直接计算也不复杂。

本题唯一的“陷阱”在于**方向的判定**：题目要求“从  $z$  轴正向看去顺时针”，根据右手法则，这意味着如果使用斯托克斯公式，曲面的法向量必须指向**下方**（背离  $z$  轴正半轴）。

**解答. 第一步：计算向量场的旋度**

力场  $\vec{F}=(y, z, x)$  的旋度为：

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1, -1, -1)$$

**第二步：确定积分曲面与法向量**

积分曲面  $\Sigma$  为平面  $x + y + z = 1$  在第一卦限的部分。因为边界  $\Gamma$  是“从  $z$  轴正向看去顺时针方向”，根据右手法则，曲面  $\Sigma$  的法向量  $\mathbf{n}$  必须指向下方（即  $z$  分量小于 0）。平面  $x + y + z = 1$  的向下法向量微元为  $d\mathbf{S} = (-z_x, -z_y, -1)dxdy = (-1, -1, -1)dxdy$ 。

**第三步：应用斯托克斯公式**

将做功化为曲面积分，并投影到  $xy$  平面上。投影区域  $D$  是直线  $x + y = 1$  与两坐标轴围成的直角三角形。

$$\begin{aligned} W &= \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_D (-1, -1, -1) \cdot (-1, -1, -1) dxdy \\ &= \iint_D (1 + 1 + 1) dxdy = 3 \iint_D dxdy \end{aligned}$$

由于投影三角形  $D$  的面积为  $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$ 。

$$W = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

**【解法二：直接算】****第一步：明确顶点的顺序（方向判定）**

三个顶点分别为  $A(1, 0, 0)$ 、 $B(0, 1, 0)$ 、 $C(0, 0, 1)$ 。题目要求“从  $z$  轴正向看去顺时针”。在  $xy$  平面上，从  $y$  轴走到  $x$  轴是顺时针。因此，在  $xy$  平面上的那一小段轨迹必须是  $B \rightarrow A$ 。由此，整个空间闭曲线的行走顺序被唯一确定为： $B(0, 1, 0) \rightarrow A(1, 0, 0) \rightarrow C(0, 0, 1) \rightarrow B(0, 1, 0)$ 。我们将闭曲线分为三段线段： $L_1(BA)$ 、 $L_2(AC)$ 、 $L_3(CB)$ 。

**第二步：分段计算**

原积分为  $I = \int_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$ 。

- 在  $L_1(B \rightarrow A)$  上：线段位于  $xy$  平面， $z = 0 \implies dz = 0$ 。方程为  $x + y = 1$ 。积分项仅剩  $y dx$ 。令  $x$  从 0 变到 1，则  $y = 1 - x$ ：

$$\int_{L_1} y dx = \int_0^1 (1 - x) dx = \left[ x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

- 在  $L_2(A \rightarrow C)$  上：线段位于  $zx$  平面， $y = 0 \implies dy = 0$ 。方程为  $x + z = 1$ 。积分项仅剩  $x dz$ 。令  $x$  从 1 变到 0，则  $z = 1 - x \implies dz = -dx$ ：

$$\int_{L_2} x dz = \int_1^0 x (-dx) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

- 在  $L_3(C \rightarrow B)$  上：线段位于  $yz$  平面， $x = 0 \implies dx = 0$ 。方程为  $y + z = 1$ 。积分项仅剩  $z dy$ 。令  $y$  从 0 变到 1，则  $z = 1 - y$ ：

$$\int_{L_3} z dy = \int_0^1 (1 - y) dy = \frac{1}{2}$$

**第三步：求和得出结果**

$$I = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

**【评述】** 这里其实蕴含着一个极其深刻的**轮换对称性**：因为被积函数  $y dx + z dy + x dz$  和积分路径在  $x, y, z$  的轮换下完全不变，所以三段线积分的值必定相等。

□

## 2 曲面积分常规计算

**例题 2.1: 常规计算** 求  $\iint_{\Sigma} xy dydz + xz dzdx + yz dxdy$ ，其中  $\Sigma$  为圆柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  在  $y \geq 0, z \geq 0$  两卦限内被平面  $z = 0$  和  $z = H (H > 0)$  所截下的部分的外侧。

**【解析】** 面对开口的曲面（圆柱面的一部分），很多同学会下意识去“补面”用高斯公式。但仔细观察：补面需要补顶、底、以及  $xz$  平面上的大矩形，计算量反而倍增！

因为圆柱面的法向量非常特殊（ $z$  分量为 0），直接用定义计算就行。

**解答. 第一步：转化为第一类曲面积分**

圆柱面  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$  的单位法向量为  $\mathbf{n} = \frac{(2x, 2y, 0)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 0\right)$ 。因为曲面取外侧且  $y \geq 0$ ，该法向量指向符合题意。将第二类转化为第一类：

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} (xy, xz, yz) \cdot \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 0\right) dS \\ &= \frac{1}{R} \iint_{\Sigma} (x^2y + xyz) dS \end{aligned}$$

**第二步：将圆柱面参数化**

在圆柱面上引入极坐标： $x = R \cos \theta, y = R \sin \theta, z = z$ 。由于在  $y \geq 0, z \geq 0$  两卦限内，且限制在  $z = 0$  到  $z = H$  之间，定限为  $\theta \in [0, \pi], z \in [0, H]$ 。圆柱面的面积微元为  $dS = R d\theta dz$ 。

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{R} \int_0^H dz \int_0^{\pi} (R^2 \cos^2 \theta \cdot R \sin \theta + R \cos \theta \cdot R \sin \theta \cdot z) R d\theta \\ I &= \int_0^H dz \int_0^{\pi} (R^3 \cos^2 \theta \sin \theta + R^2 z \sin \theta \cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

**第三步：分离变量计算积分**

对于内层关于  $\theta$  的积分：

$$\int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{3}(-1 - 1) = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta\right]_0^{\pi} = 0$$

将其代入外层：

$$I = \int_0^H \left(\frac{2}{3} R^3 + 0\right) dz = \frac{2}{3} R^3 H$$

□

**例题 2.2:** 含有绝对值的第一类曲面积分与对称性 计算  $I = \iint_{\Sigma} |xyz| dS$ , 其中  $\Sigma$  为  $z = x^2 + y^2$  在  $z = 1$  以下的部分。

**【解析】** 绝对值是积分的“死敌”，必须想办法去掉。

观察积分区域和被积函数的对称性，我们只需要计算**第一卦限** ( $x \geq 0, y \geq 0$ ) 的部分，然后直接乘以 4，就能去绝对值符号！后续只需套用第一类曲面积分的标准公式，化为极坐标求解即可。

**解答. 第一步：利用对称性去绝对值**

曲面  $\Sigma$  关于  $xz$  平面和  $yz$  平面均对称。由于  $|xyz|$  是偶函数，原积分等于第一卦限部分（记为  $\Sigma_1$ ）的 4 倍。在  $\Sigma_1$  上  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ，可直接去掉绝对值：

$$I = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$$

**第二步：投影化为二重积分**

将曲面投影到  $xy$  平面，区域  $D_1$  为第一象限内的四分之一圆： $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ 。曲面方程  $z = x^2 + y^2$  的偏导数为  $z_x = 2x, z_y = 2y$ 。面积微元  $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy$ 。

$$I = 4 \iint_{D_1} xy(x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy$$

**第三步：极坐标系下的计算**

令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, dxdy = r dr d\theta$ 。定限为  $0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 1$ 。

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r dr \\ &= 4 \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 r^5 \sqrt{1 + 4r^2} dr = 2 \int_0^1 r^5 \sqrt{1 + 4r^2} dr \end{aligned}$$

这里老实换元了，令  $u^2 = 1 + 4r^2 (u > 0)$ ，

则  $r^2 = \frac{u^2 - 1}{4}, 8r dr = 2u du \implies r dr = \frac{u}{4} du$ 。当  $r = 0$  时  $u = 1$ ；当  $r = 1$  时  $u = \sqrt{5}$ 。

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_1^{\sqrt{5}} \left(\frac{u^2 - 1}{4}\right)^2 \sqrt{u^2} \frac{u}{4} du = \frac{2}{64} \int_1^{\sqrt{5}} (u^4 - 2u^2 + 1)u^2 du \\ &= \frac{1}{32} \int_1^{\sqrt{5}} (u^6 - 2u^4 + u^2) du \\ &= \frac{1}{32} \left[ \frac{1}{7} u^7 - \frac{2}{5} u^5 + \frac{1}{3} u^3 \right]_1^{\sqrt{5}} \\ I &= \frac{1}{32} \left( \frac{1000\sqrt{5}}{105} - \frac{8}{105} \right) = \frac{125\sqrt{5} - 1}{420} \end{aligned}$$

□

**例题 2.3:** 第一类曲面积分的对称性化简 计算  $\iint_{\Sigma}(xy + yz + zx)dS$ , 其中  $\Sigma$  是锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被圆柱面  $x^2 + y^2 = 2ax (a > 0)$  所割下的部分。

**【解析】** 这道题是典型的“第一类曲面积分 + 对称性”组合拳。看到复杂的被积函数，第一反应必须是找对称性！

积分曲面关于  $x$  轴（即  $y$  替换为  $-y$ ）对称，利用奇偶性可以解决掉  $xy$  和  $yz$  这两项。此外，对于直角锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，它的面积微元  $dS = \sqrt{2}dxdy$ 。

**解答. 第一步：利用对称性消去奇函数项**

积分曲面  $\Sigma$  在  $xy$  平面的投影区域  $D_{xy}$  由圆柱面决定，即  $x^2 + y^2 \leq 2ax \implies (x-a)^2 + y^2 \leq a^2$ 。这是一个圆心在  $(a, 0)$ ，半径为  $a$  的圆，它显然关于  $x$  轴对称。曲面方程  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  同样关于  $y$  偶对称。观察被积函数： $xy$  是关于  $y$  的奇函数； $yz = y\sqrt{x^2 + y^2}$  也是关于  $y$  的奇函数。根据第一类曲面积分的对称性，这两项积分为 0：

$$\iint_{\Sigma} xy dS = 0, \quad \iint_{\Sigma} yz dS = 0$$

原积分瞬间化简为：

$$I = \iint_{\Sigma} zx dS$$

**第二步：计算面积微元并化为二重积分**

对于圆锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，求偏导数：

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

面积微元为：

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dxdy = \sqrt{2} dxdy$$

将  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  代入积分式，化为投影区域  $D_{xy}$  上的二重积分：

$$I = \iint_{D_{xy}} x\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} x\sqrt{x^2 + y^2} dxdy$$

**第三步：极坐标系下计算二重积分**

引入极坐标  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 。投影区域圆的边界为  $r = 2a \cos \theta$ ，定限为  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 。

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} (r \cos \theta) \cdot r \cdot r dr \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_0^{2a \cos \theta} d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a^4 \cos^5 \theta d\theta \end{aligned}$$

利用偶函数的对称性和 Wallis 公式:

$$I = 8\sqrt{2}a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta = 8\sqrt{2}a^4 \left( \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{64\sqrt{2}}{15} a^4$$

如果不记得这个公式也能直接计算:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \cdot \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta)^2 d(\sin \theta) \end{aligned}$$

令  $u = \sin \theta$ , 当  $\theta = 0$  时  $u = 0$ ; 当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时  $u = 1$ 。

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta)^2 d(\sin \theta) &= \int_0^1 (1 - u^2)^2 du \\ &= \int_0^1 (1 - 2u^2 + u^4) du \\ &= \left[ u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15 - 10 + 3}{15} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

将该积分结果代回原式:

$$I = 8\sqrt{2}a^4 \cdot \frac{8}{15} = \frac{64\sqrt{2}}{15} a^4$$

□

**例题 2.4: 常规计算** 计算  $\iint_{\Sigma} z dx dy + x dy dz + y dz dx$ , 其中  $\Sigma$  是柱面  $x^2 + y^2 = 1$  被平面  $z = 0$  及  $z = 3$  所截得的在第一卦限内的部分的前侧。

### 【解析】

直接按定义算就行了。

#### 解答. 第一步: 确定单位法向量

积分曲面  $\Sigma$  为第一卦限内的部分圆柱面, 取“前侧”即取向外的法向量。设圆柱面方程  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ , 其梯度为  $\nabla F = (2x, 2y, 0)$ 。由于  $\Sigma$  在第一卦限 ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), 朝外的单位法向量为:

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{(2x, 2y, 0)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = (x, y, 0)$$

#### 第二步: 将第二类曲面积分转化为第一类

利用微元关系式  $dy dz = \cos \alpha dS, dz dx = \cos \beta dS, dx dy = \cos \gamma dS$ , 将原积分转化:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} (z \cos \gamma + x \cos \alpha + y \cos \beta) dS \\ &= \iint_{\Sigma} (z \cdot 0 + x \cdot x + y \cdot y) dS \\ &= \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS \end{aligned}$$

**第三步：利用曲面方程进行整体代入与几何求解**

由于积分点始终在曲面  $\Sigma: x^2 + y^2 = 1$  上，我们可以直接将约束条件  $x^2 + y^2 = 1$  整体代入被积函数中：

$$I = \iint_{\Sigma} 1 dS = \iint_{\Sigma} dS$$

积分  $\iint_{\Sigma} dS$  的几何意义就是求曲面  $\Sigma$  的表面积。 $\Sigma$  是一个底面半径  $R = 1$ 、高  $h = 3$  的圆柱面在第一卦限的部分（即四分之一圆柱的侧面积）。

$$\text{表面积} = \frac{1}{4} \cdot (2\pi R h) = \frac{1}{4} \cdot (2\pi \cdot 1 \cdot 3) = \frac{3\pi}{2}$$

所以，最终积分为：

$$I = \frac{3\pi}{2}$$

□

**3 高斯公式的常规运用**

**例题 3.1:** 高斯公式与四面体区域的重积分 计算  $\iint_{\Sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dz dx$ ，其中  $\Sigma$  是平面  $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$  所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧。

**【解析】** 直接高斯公式。

对称性上要注意：散度算出来刚好是  $x + y + z$ ，而积分区域（标准四面体）关于  $x, y, z$  是完全轮换对称的。

**解答. 第一步：整理标准形式并应用高斯公式**

注意题目给出的积分项顺序有调换，我们先将其对应到标准形式  $P dy dz + Q dz dx + R dx dy$  中：

$$P = xy, \quad Q = yz, \quad R = xz$$

由于积分曲面  $\Sigma$  是封闭的，且取外侧法向量，完全满足高斯公式的使用条件。计算散度：

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y + z + x$$

记该四面体封闭区域为  $\Omega$ ，由高斯公式：

$$I = \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz$$

**第二步：利用轮换对称性化简**

积分区域  $\Omega$  是由四个平面围成的标准四面体，它在坐标变量  $x, y, z$  的轮换下形状完全不变。因此，多项式中各个一次项的积分必定相等：

$$\iiint_{\Omega} x dV = \iiint_{\Omega} y dV = \iiint_{\Omega} z dV$$

所以原积分可化简为只算一项:

$$I = 3 \iiint_{\Omega} z \, dx dy dz$$

### 第三步: 投影法计算三重积分

采用“先一后二”的方法定限: 投影区域  $D_{xy}$  为直角三角形  $x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ 。

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z \, dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{1-x-y} z \, dz \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2}(1-x-y)^2 \, dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 \, dy \end{aligned}$$

内层积分:

$$\int_0^{1-x} (1-x-y)^2 \, dy = \left[ -\frac{1}{3}(1-x-y)^3 \right]_0^{1-x} = \frac{1}{3}(1-x)^3$$

外层积分:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{3}(1-x)^3 \, dx = \frac{1}{6} \left[ -\frac{1}{4}(1-x)^4 \right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

最终结果:

$$I = 3 \times \frac{1}{24} = \frac{1}{8}$$

□

**例题 3.2: 高斯公式与对称性** 设  $\Sigma$  为空间立体区域  $\{(x, y, z) \mid x^2 + 4y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$  表面的外侧, 求曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x^2 \, dy dz + y^2 \, dz dx + z \, dx dy$$

**【解析】** 用高斯公式就行了。

继续看对称性, 算出散度后会得到  $2x + 2y + 1$ , 而积分区域 (椭圆柱体) 关于坐标面是对称的。这意味  $2x$  和  $2y$  这两项的三重积分直接等于 0! 最后只剩下一个 1 的积分。

**解答. 第一步: 应用高斯公式转化为三重积分**

设空间立体区域为  $\Omega$ 。闭曲面  $\Sigma$  取外侧, 满足高斯公式的使用条件。计算向量场  $\vec{F} = (x^2, y^2, z)$  的散度:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} = 2x + 2y + 1$$

由高斯公式转化为三重积分:

$$I = \iiint_{\Omega} (2x + 2y + 1) \, dx dy dz$$

**第二步: 利用对称性化简三重积分**

积分区域  $\Omega: x^2 + 4y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2$  是一个椭圆柱体。它关于  $yz$  平面 (即  $x \rightarrow -x$ ) 和  $zx$  平

面（即  $y \rightarrow -y$ ）均对称。由于  $2x$  是关于  $x$  的奇函数， $2y$  是关于  $y$  的奇函数，它们在对应对称区域上的积分为 0：

$$\iiint_{\Omega} 2x \, dx \, dy \, dz = 0, \quad \iiint_{\Omega} 2y \, dx \, dy \, dz = 0$$

原三重积分瞬间大幅度化简为求几何体的体积：

$$I = \iiint_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz = V(\Omega)$$

### 第三步：计算圆柱体积

底面为椭圆  $x^2 + 4y^2 \leq 4 \implies \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} \leq 1$ ，其半轴长分别为  $a = 2, b = 1$ 。底面积  $S = \pi ab = 2\pi$ 。高  $h = 2$ 。所以圆柱体积  $V(\Omega) = S \cdot h = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$ 。最终结果为：

$$I = 4\pi$$

□

## 4 自由变动曲面，整体带入

**例题 4.1:** 含奇点曲面积分（挖洞法） 计算曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} \frac{x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ ，其中  $\Sigma$  是曲面  $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$  的外侧。

**【解析】** 这是微积分（包括电磁学高斯定理）中最著名的“奇点积分”模型，这个场就是单个点电荷产生的电场。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r}$$

如果直接在全空间用高斯公式，散度算出来是 0，很多同学就会想当然地直接填答案 0。但这完全是错的！因为内部有点电荷呀。

因为原点  $(0, 0, 0)$  是被积函数的奇点（分母为 0），而这个奇点恰好被曲面  $\Sigma$  包围在内部，根本不满足高斯公式“区域内连续偏导”的条件。

对于这种情况，可以自由变动积分曲面（只要没经过原点），方便整体带入。

一种典型写法是“挖洞法”：在内部作一个包围原点的微小球面，利用夹层区域内的散度为 0，将原曲面的积分等价转移到微小球面上计算，最后结果永远是固定的常数  $4\pi$ 。

为什么要取微小球面呢？只是为了让内部曲面和外部曲面不交，这个时候直接用一下高斯公式，但其实相交也没事。

### 解答. 第一步：验证散度并识别奇点

记  $\vec{r} = (x, y, z)$ ，模长  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。被积向量场为  $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ 。计算其在  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  处的散度：

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r^3} \right)$$

以对  $x$  的偏导为例:  $\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot r^{-3}) = 1 \cdot r^{-3} + x \cdot (-3r^{-4}) \cdot \frac{x}{r} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$ . 三项相加得:  $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = 0$ . 注意: 在原点  $O(0,0,0)$  处, 散度不存在. 而积分曲面  $\Sigma$  (椭球面) 将原点包围在内.

### 第二步: 使用“挖洞法”形变曲面

在  $\Sigma$  内部取一个以原点为球心、 $\epsilon$  为半径的微小球面  $S_\epsilon: x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2$ , 取外侧法向量. 由  $\Sigma$  和  $S_\epsilon$  围成的夹层立体区域  $\Omega_\epsilon$  内没有奇点. 在  $\Omega_\epsilon$  上应用高斯公式 (注意  $S_\epsilon$  此时是内边界, 向外法向量带负号):

$$\iiint_{\Omega_\epsilon} (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} - \iint_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

由于夹层内  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ , 左边积分值为 0. 从而得到等效替换:

$$I = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

### 第三步: 在微小球面上代入计算

在球面  $S_\epsilon$  上, 单位外法向量方向就是径向  $\mathbf{n} = (\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon}, \frac{z}{\epsilon})$ . 将第二类曲面积分转为第一类:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S_\epsilon} \left( \frac{x}{\epsilon^3}, \frac{y}{\epsilon^3}, \frac{z}{\epsilon^3} \right) \cdot \left( \frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon}, \frac{z}{\epsilon} \right) dS \\ &= \iint_{S_\epsilon} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\epsilon^4} dS \end{aligned}$$

由于在  $S_\epsilon$  上约束条件恒成立:  $x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2$ , 被积函数化简为常数  $\frac{\epsilon^2}{\epsilon^4} = \frac{1}{\epsilon^2}$ :

$$I = \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{S_\epsilon} dS$$

利用球面表面积公式  $S = 4\pi\epsilon^2$ , 最终得到:

$$I = \frac{1}{\epsilon^2} \cdot 4\pi\epsilon^2 = 4\pi$$

□

**例题 4.2:** 含参曲面积分极限、高斯公式与洛必达法则的综合 设函数  $f(x)$  连续可导,  $P = Q = R = f((x^2 + y^2)z)$ , 有向曲面  $\Sigma_t$  是圆柱体  $x^2 + y^2 \leq t^2, 0 \leq z \leq 1$  的表面, 方向朝外. 记第二类曲面积分

$$I_t = \iint_{\Sigma_t} P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

求极限  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I_t}{t^4}$ .

## 5 综合大题

**【解析】** 第一步用高斯公式将曲面积分化为含参数  $t$  的圆柱体内部的重积分. 此时一定要敏锐地利用圆柱体区域对  $x$  和  $y$  的对称性.

最后利用柱坐标化为积分上限函数求极限, 用洛必达法则.

**解答. 第一步: 应用高斯公式并计算散度**

设圆柱体区域为  $\Omega_t = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq t^2, 0 \leq z \leq 1\}$ 。封闭曲面  $\Sigma_t$  取外侧。应用高斯公式:

$$I_t = \iiint_{\Omega_t} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

利用复合函数链式求导法则:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = f'((x^2 + y^2)z) \cdot 2xz$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = f'((x^2 + y^2)z) \cdot 2yz$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = f'((x^2 + y^2)z) \cdot (x^2 + y^2)$$

**第二步: 利用对称性化简三重积分**

将散度各项代入积分式:

$$I_t = \iiint_{\Omega_t} f'((x^2 + y^2)z)(2xz + 2yz + x^2 + y^2) dx dy dz$$

观察积分区域  $\Omega_t$ : 圆柱体关于  $yz$  平面 (即  $x \rightarrow -x$ ) 和  $zx$  平面 (即  $y \rightarrow -y$ ) 均是对称的。复合函数  $f'((x^2 + y^2)z)$  是偶函数, 因此: 项  $f'((x^2 + y^2)z) \cdot 2xz$  是关于  $x$  的奇函数; 项  $f'((x^2 + y^2)z) \cdot 2yz$  是关于  $y$  的奇函数。这两项在对应对称区域内的三重积分绝对为 0。积分大幅化简:

$$I_t = \iiint_{\Omega_t} f'((x^2 + y^2)z)(x^2 + y^2) dx dy dz$$

**第三步: 利用柱坐标计算积分并构造上限函数**

引入柱面坐标系:  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$ , 微元  $dV = r dr d\theta dz$ 。定限为  $\theta \in [0, 2\pi], r \in [0, t], z \in [0, 1]$ 。

$$\begin{aligned} I_t &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t dr \int_0^1 f'(r^2 z) \cdot r^2 \cdot r dz \\ &= 2\pi \int_0^t \left( r^3 \int_0^1 f'(r^2 z) dz \right) dr \end{aligned}$$

**第四步: 利用洛必达法则求  $\frac{0}{0}$  型极限**

令积分内核为  $G(r) = \int_0^1 f'(r^2 z) dz$ , 则  $I_t = 2\pi \int_0^t r^3 G(r) dr$ 。要求解极限:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I_t}{t^4} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\pi \int_0^t r^3 G(r) dr}{t^4}$$

对分子分母同时关于上限  $t$  求导 (变上限积分求导定理):

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\pi t^3 G(t)}{4t^3} = \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} G(t) \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 f'(t^2 z) dz \end{aligned}$$

因为  $f(x)$  连续可导, 其导数  $f'(x)$  在区间内连续。当  $t \rightarrow 0^+$  时,  $t^2 z \rightarrow 0$ 。

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 f'(t^2 z) dz = \int_0^1 f'(0) dz = f'(0) \cdot (1 - 0) = f'(0)$$

得出最终极限结果:

$$\frac{\pi}{2} f'(0)$$

□