常微分方程 · I

秦加俊

2026 年 4 月 11 日

1 常微分方程的一些误区澄清

【课前评述】在正式开始求解常微分方程 (ODE) 之前，我们必须在观念上明确 “我们在求什么”。常微分方程的本质必须严格满足以下几个核心特征：

1. **未知对象是函数**：我们要找的是一个满足演化规律的未知函数（轨迹），而不是一个或几个静态的数值；
2. **必须含有导数或微分**：方程中至少要包含未知函数对其自变量的一阶或更高阶的导数；
3. **自变量有且仅有一个**：这是 “常（Ordinary）” 的真正含义。意味着演化只沿一个维度发生；
4. **局部性（无记忆性）**：系统当前的变化率，只能依赖于**同一时刻**的系统状态。

例题 1.1: 这些为什么不是常微分方程？ 判断下列方程是否为常微分方程，并说明理由：

1. $x^2 + y^2 = 1$
2. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
3. $y'(x) = y(x-1)$
4. $\int_0^x y(t)\,dt = e^x - 1$

解答. 以上四个方程**都不是**经典的常微分方程。它们分别代表了数学中另外几类重要的方程形态：

1. $x^2 + y^2 = 1$：这是**代数方程**（或几何曲线方程）。虽然它描述了变量 x 和 y 之间的约束关系，但方程中没有任何导数或微分项参与。
2. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$：这是**偏微分方程 (PDE)**。未知函数 $u(x,t)$ 依赖于两个独立的自变量 x 和 t，且方程中出现的是偏导数。偏微分方程研究的是多维时空中的演化。
3. $y'(x) = y(x-1)$：这是**时滞微分方程 (Delay Differential Equation, DDE)**。它虽然有导数且只有一个自变量，但它**违背了局部性**。导数 $y'(x)$ 依赖于过去（$x-1$ 时刻）的状态 $y(x-1)$。解这种方程不能只给一个点的初值，必须给定整整一个区间上的初始函数。

4. $\int_0^x y(t)\,dt = e^x - 1$：这是**积分方程**。未知函数 $y(x)$ 隐藏在积分号内部，方程本身并没有显式地给出其导数。（注：虽然可以通过对两边求导将其转化为普通方程 $y(x) = e^x$，但在其原始形式下，它不叫微分方程）。

【注意】识别经典常微分方程的口诀是："有未知函数、有且仅有常规导数、只有一个自变量、且只看当下不看过去"。 □

> **例题 1.2:** 通解与特解：概念的澄清与迷思　在求解微分方程时，我们常说要求出方程的"通解"和"特解"。请问："通解"是否意味着包含了方程的**所有解**？"通解"取定常数后得到的解，与"特解"是什么关系？请举例说明。

解答. **第一步：概念的正本清源**
首先，我们要明确这两个名词在数学上的严格定义：

- **特解 (Particular Solution)**：指满足微分方程的**某一个具体的解**，其中不包含任何未确定的任意常数。
- **通解 (General Solution)**：指包含独立任意常数的解族，且**任意常数的个数必定等于微分方程的阶数**。

显然，当我们将通解中的任意常数赋予某个具体的实数值时，得到的解不再含有任意常数，自然就成为了一个特解。

第二步：破除迷思——通解 ≠ 所有解
这是一个初学者极其容易踩坑的误区：认为通解就像一个全集，包含了方程所有的解。实际上，**微分方程的通解并不一定包含所有的解**。有些解游离于通解的家族之外，无论你怎么调整通解中的常数，都无法得到它们。这种解在数学上被称为**奇解 (Singular Solution)**。

第三步：一个直观的反例
考虑一阶微分方程：

$$y' = 2\sqrt{y} \quad (y \ge 0)$$

使用分离变量法求解，当 $y > 0$ 时，有 $\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$。两边积分得到：

$$\sqrt{y} = x + C \implies y = (x + C)^2 \quad (\text{其中} x \ge -C)$$

这就是该方程的**通解**（包含一个独立的任意常数 C）。如果你取 $C = 0$，就得到了一个**特解**：$y = x^2$。

但是，观察原方程，我们很容易发现**常数函数** $y \equiv 0$ **也是方程的一个解**（代入方程两边均为 0）。然而，请仔细观察通解 $y = (x + C)^2$：无论你给常数 C 取什么实数，你都只能得到一条在 x 轴上方开口向上的半抛物线，**永远无法**得到 $y \equiv 0$ 这条贴着 x 轴的水平直线！

因此，$y \equiv 0$ 是一个**特解**（因为它是一个具体的解），同时也是一个**奇解**，它并不包含在通解中。（从几何上看，奇解 $y \equiv 0$ 其实是通解抛物线族的**包络线**）。

【评论】"特解"仅仅是用来指代"单个具体的解"的存在状态。它既可以是你从通解中赋予常数具体值后"生"出来的解，也可以是游离于通解之外的"奇解"。切记：通解只是解系中带有常数参数的主力家族，绝对不能把它和"所有解"画上等号。 □

例题 1.3: 通解中常数的"独立性"：隐函数定理的视角　对于 n 阶常微分方程，我们常说其通解必须包含 n 个**相互独立**的任意常数：$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$。请问："相互独立"在这里的严格分析学意义是什么？试从能否反解出常数的角度，判断解族 $y = C_1 e^{x+C_2}$ 是否为二阶方程 $y'' - y = 0$ 的通解。

解答. **第一步：常数"独立"的分析学本质**

在初学时，很多同学对常数独立的理解仅停留在"长得不像"或者"不能合并"的直观层面。但在常微分方程理论中，"独立"有着极其深刻的内涵，它直接与**初值问题**绑定。

给定 n 阶方程的初始状态 $(y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$，我们希望通解能够唯一适配这个状态。这意味着我们必须能够从以下 n 个方程组成的方程组中，**局部唯一地反解出**这 n 个常数 $C_1, \ldots, C_n$：

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ y' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ \vdots \\ y^{(n-1)} = \frac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial x^{n-1}}(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{cases}$$

根据高等数学中的**隐函数存在定理**，能够反解出 $(C_1, \ldots, C_n)$ 的充分条件是，上述映射关于 $C_1, \ldots, C_n$ 的雅可比行列式（Jacobian determinant）在给定区域内不恒为零：

$$\frac{\partial(y, y', \ldots, y^{(n-1)})}{\partial(C_1, C_2, \ldots, C_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial C_1} & \frac{\partial y}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial C_n} \\ \frac{\partial y'}{\partial C_1} & \frac{\partial y'}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial y'}{\partial C_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial C_1} & \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

这就是常数"相互独立"的判据！对于线性方程，这个雅可比行列式本质上就是著名的**朗斯基行列式（Wronskian）**。

第二步：对反例的无情拆解

现在我们来看解族 $y = C_1 e^{x+C_2}$。它看起来确实有两个常数 C_1, C_2，而且 $y'' = C_1 e^{x+C_2} = y$，确实满足方程 $y'' - y = 0$。它是通解吗？

我们构造前 $n-1$（即一阶）导数方程组：

$$\begin{cases} y = C_1 e^{x+C_2} \\ y' = C_1 e^{x+C_2} \end{cases}$$

计算其关于 C_1, C_2 的雅可比行列式：

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial C_1} & \frac{\partial y}{\partial C_2} \\ \frac{\partial y'}{\partial C_1} & \frac{\partial y'}{\partial C_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x+C_2} & C_1 e^{x+C_2} \\ e^{x+C_2} & C_1 e^{x+C_2} \end{vmatrix} = C_1 e^{2(x+C_2)} - C_1 e^{2(x+C_2)} \equiv 0$$

雅可比行列式**恒等于零**！这说明我们根本无法从 (y,y') 中反解出独立的 (C_1,C_2)。从代数上看更明显：$y=C_1e^{C_2}\cdot e^x=Ke^x$，这两个常数实际上已经"坍缩"成了一个常数 K。因此它只能算作一阶方程 $y'=y$ 的通解，绝不是二阶方程 $y''-y=0$ 的通解。

【评论】在微积分中我们学过，雅可比矩阵降秩意味着映射发生了"降维"。通解中常数的独立性，在几何上就是在保证：解族在 n 维的相空间 $(y,y',\dots,y^{(n-1)})$ 中具有足够多的"自由度"，能够铺满整个空间，从而接住任意给定的初始点。这就是求解的必要条件。 □

2 初等积分法：纯粹的计算，变形技巧

2.1 概念理解

在具体罗列各式各样的解题技巧之前，我们必须先对"初等积分法"这一概念进行严格的界定，并清醒地认识到它的理论边界。

知识 2.1: 初等积分法

在常微分方程理论中，**"初等积分法"**有着严格的定义：

如果在**有限次**操作内，能够将常微分方程的求解转化为计算**已知初等函数的原函数**，并且方程的解能够通过有限次代数运算、函数复合以及**不定积分运算**（无论该不定积分最终是否能用初等函数显式写出）来表示，我们就称该方程"可用初等积分法求解"。

简而言之：只要你能通过代数变形，将未知的演化规律逼退到只剩下 $\int f(x)dx$ 或 $\int g(y)dy$ 的形式，在微分方程的语境下，这就已经宣告了"彻底破解"。

【警钟：初等积分法的必然局限性】

在做微积分练习时，我们容易产生一种错觉：只要代换技巧足够花哨，任何一阶方程最终都能"积"出来。但在真实的数学世界中，初等积分法其实是极其脆弱的。它的局限性体现在三道难以逾越的鸿沟：

1. **隐函数的迷宫（"可积"不等于"可见"）**

   即便我们极其幸运地算出了所有的积分，最终得到的往往是形如 $\Phi(x,y)=C$ 的隐式方程。在绝大多数非线性情况下（例如解出 $y^5+e^y\sin x+x^2=C$），我们根本无法从代数上全局反解出 $y=\varphi(x)$。这让我们在后续分析系统状态随时间的长期演化行为时，寸步难行。

2. **超越积分的叹息（"写得出"不等于"算得出"）**

   假设我们把方程化简到了最理想的形式 $y(x)=\int f(x)dx$。根据刘维尔（Liouville）定理，即使 $f(x)$ 是极其简单的初等函数（例如 e^{-x^2} 或 $\frac{\sin x}{x}$），其原函数也绝大多数**无法用初等函数的有限次组合来表示**。你虽然在理论上"解"出了 ODE，但在实际应用中，那个挂在等号右边的积分号却成了一道物理不可计算的叹息之墙。

3. **绝对的"少数派"（非线性的汪洋大海）**

   能被初等积分法解决的方程，在所有可能的常微分方程中只是沧海一粟。绝大多数的非线

性微分方程，哪怕形式再简单（例如 $y' = x^2 + y^2$，这是著名的 Riccati 方程的一个特例），从理论上就已经被证明：**绝对不存在任何初等积分法的求解途径**。

【评论】向大家指出初等积分法的局限，绝不是贬低它的价值。相反，正是因为“算不出来”才是真实世界的常态，那些能被“算出来”的方程才显得尤为珍贵。我们今天学习初等积分法，是为了将这些极其罕见且优美的“可积模型”牢牢握在手中，以此作为锚点和坐标系，去定性研究未来偏微分方程和动力系统中那些更加庞大且无法精确求解的混沌世界。

2.2 计算

【课前评述】面对复杂多变的一阶微分方程，前人总结出了一套行之有效的“算术”。但这绝不是一堆需要死记硬背的孤立公式，其背后的核心思想极其统一：**通过积分因子转化为全微分形式**。

我们点到为止，不再细说，将为什么积分因子是最底层的逻辑，作为附录。现在先直接开始计算吧。

知识 2.2: 一阶常微分方程的工具库

对于一阶常微分方程的常见形态，我们有以下五种标准处理手段：

1. **可分离变量方程**：形式为 $g(y)dy = f(x)dx$。
   - 核心思路：变量已完美隔离，直接两边积分即可得到隐式通解 $\int g(y)dy = \int f(x)dx + C$。
2. **齐次方程**：形式为 $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$。
   - 核心思路：利用几何上的位似不变性，作代换 $u = \frac{y}{x}$（即 $y = ux$），可将其转化为变量 u 和 x 的可分离变量方程 $x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$。
3. **一阶线性方程**：形式为 $y' + p(x)y = q(x)$。
   - 核心思路：寻找并乘上积分因子 $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$，将方程左侧强行凑成全微分导数 $\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)q(x)$，从而直接积分破解。
4. **伯努利 (Bernoulli) 方程**：形式为 $y' + p(x)y = q(x)y^n$ $(n \neq 0, 1)$。
   - 核心思路：本质是非线性方程，但可以通过变量代换 $z = y^{1-n}$ 解决，完美转化为关于 z 的一阶线性方程。
5. **全微分方程 (恰当方程)**：形式为 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$，且满足交叉偏导数相等 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$。
   - 核心思路：方程左端恰好是某个二元函数 $U(x,y)$ 的全微分 $dU = 0$。通过曲线积分或凑微分法求出 $U(x,y)$，则通解为等高线族 $U(x,y) = C$。若交叉偏导数不等，则需寻找积分因子 $\mu(x,y)$ 进行“救场”。

例题 2.1: 微分方程求解 (1)　求微分方程的通解: $(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$

解答. 提取公因式，原方程可化为:

$$e^x(e^y-1)dx+e^y(e^x+1)dy=0$$

这是一个可分离变量方程，分离变量得到:

$$\frac{e^x}{e^x+1}dx+\frac{e^y}{e^y-1}dy=0$$

两边同时积分:

$$\int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1}+\int\frac{d(e^y-1)}{e^y-1}=C_1$$
$$\ln(e^x+1)+\ln|e^y-1|=\ln|C|$$

整理可得通解:

$$(e^x+1)(e^y-1)=C$$

□

例题 2.2: 微分方程求解 (2)　求微分方程的通解: $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$

解答. 整理方程，将其化为齐次方程的标准形式:

$$y'=\frac{y}{x}(\ln y-\ln x)=\frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux$，$y'=u'x+u$，代入原方程:

$$u'x+u=u\ln u\implies x\frac{du}{dx}=u(\ln u-1)$$

分离变量并积分:

$$\int\frac{du}{u(\ln u-1)}=\int\frac{dx}{x}$$
$$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln|C|\implies\ln u-1=Cx$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代回，得到通解:

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right)=Cx+1\implies y=xe^{Cx+1}$$

□

例题 2.3: 微分方程求解 (3)　求微分方程的通解: $\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\arctan\frac{y}{x}=x$

解答. 两边同除以 x，化为齐次方程：

$$\left(\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}\right)\arctan\frac{y}{x}=1$$

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y'=u'x+u$，代入方程：

$$(u'x+u-u)\arctan u=1 \implies x\frac{du}{dx}\arctan u=1$$

分离变量并积分：

$$\int\arctan u\,du=\int\frac{dx}{x}$$

利用分部积分法计算左边：

$$u\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|x|+C$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代回：

$$\frac{y}{x}\arctan\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=\ln|x|+C$$

$$\frac{y}{x}\arctan\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\frac{1}{2}\ln x^2=\ln|x|+C$$

化简得到通解（也可写为隐式）：

$$y\arctan\frac{y}{x}-\frac{x}{2}\ln(x^2+y^2)=Cx$$

□

例题 2.4: 微分方程求解 (4) 求微分方程的通解：$y^2dx-(4xy-2x^2)dy=0$

解答. 将方程写成 $\frac{dx}{dy}$ 的形式：

$$\frac{dx}{dy}=\frac{4xy-2x^2}{y^2}=4\left(\frac{x}{y}\right)-2\left(\frac{x}{y}\right)^2$$

这可以看作是将 x 视为未知函数的齐次方程。令 $u=\frac{x}{y}$，则 $x=uy$，$\frac{dx}{dy}=u'y+u$。

$$u'y+u=4u-2u^2 \implies y\frac{du}{dy}=3u-2u^2=u(3-2u)$$

分离变量：

$$\frac{du}{u(3-2u)}=\frac{dy}{y}$$

利用部分分式展开：

$$\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{u}+\frac{2}{3-2u}\right)du=\int\frac{dy}{y}$$

$$\frac{1}{3}\ln|u|-\frac{1}{3}\ln|3-2u|=\ln|y|+C_1$$

$$\ln\left|\frac{u}{3-2u}\right| = \ln|Cy^3| \implies \frac{u}{3-2u} = Cy^3$$

将 $u = \frac{x}{y}$ 代回并化简：

$$\frac{x/y}{3-2x/y} = Cy^3 \implies \frac{x}{3y-2x} = Cy^3$$

通解为：$x = Cy^3(3y-2x)$。 □

例题 2.5: 微分方程求解 (5) 求微分方程的通解: $(2x+y-4)dx + (x+y-1)dy = 0$

解答. 求解常数项决定的线性方程组：

$$\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$$

作平移变换：令 $x = u+3$，$y = v-2$，则 $dx = du$，$dy = dv$。方程化为齐次方程：

$$(2u+v)du + (u+v)dv = 0 \implies \frac{dv}{du} = -\frac{2u+v}{u+v} = -\frac{2+(v/u)}{1+(v/u)}$$

令 $w = \frac{v}{u}$，则 $v = wu$，$v' = w'u + w$：

$$w'u + w = -\frac{w+2}{w+1} \implies u\frac{dw}{du} = -\frac{w^2+2w+2}{w+1}$$

分离变量并积分：

$$-\int \frac{w+1}{w^2+2w+2}dw = \int \frac{du}{u}$$

$$-\frac{1}{2}\ln(w^2+2w+2) = \ln|u| + C_1 \implies u^2(w^2+2w+2) = C$$

即 $v^2+2uv+2u^2 = C$。代回 $u = x-3, v = y+2$：

$$(y+2)^2 + 2(x-3)(y+2) + 2(x-3)^2 = C$$

展开化简得到通解：

$$2x^2+2xy+y^2-8x-2y = C$$

□

例题 2.6: 微分方程求解 (6) 求微分方程的通解: $(2x+y-4)dx + (2x+y-1)dy = 0$

解答. 由于 $2x+y$ 出现两次（系数成比例），令 $u = 2x+y$，则 $dy = du - 2dx$。代入原方程：

$$(u-4)dx + (u-1)(du-2dx) = 0$$

$$(u-4-2u+2)dx + (u-1)du = 0 \implies (-u-2)dx + (u-1)du = 0$$

分离变量并积分：

$$dx = \frac{u-1}{u+2}du = \left(1 - \frac{3}{u+2}\right)du$$
$$x = u - 3\ln|u+2| + C$$

代回 $u = 2x + y$ 得到通解：

$$x = 2x + y - 3\ln|2x+y+2| + C \implies x + y - 3\ln|2x+y+2| = C$$

□

例题 2.7: *微分方程求解* (7) 求微分方程的通解：$\cos x\frac{dy}{dx} + \sin x \cdot y = 1$

解答. 方程两边同除以 $\cos x$，化为一阶线性标准形式：

$$\frac{dy}{dx} + \tan x \cdot y = \sec x$$

寻找积分因子：$\mu(x) = e^{\int \tan x dx} = e^{-\ln|\cos x|} = \sec x$。方程两边同乘积分因子：

$$\sec x \cdot y' + \sec x \tan x \cdot y = \sec^2 x \implies (\sec x \cdot y)' = \sec^2 x$$

两边积分：

$$\sec x \cdot y = \tan x + C$$

两边同乘 $\cos x$ 得到通解：

$$y = \sin x + C\cos x$$

□

例题 2.8: *微分方程求解* (8) 求微分方程的通解：$y' = \frac{1}{xy+y^3}$

解答. 将方程倒数，视为 x 关于 y 的函数：

$$\frac{dx}{dy} = xy + y^3 \implies \frac{dx}{dy} - yx = y^3$$

这是一阶线性微分方程。积分因子为 $\mu(y) = e^{\int -ydy} = e^{-\frac{y^2}{2}}$。两边同乘积分因子：

$$\left(xe^{-\frac{y^2}{2}}\right)' = y^3e^{-\frac{y^2}{2}}$$

对等式右侧积分（可使用代换 $t = -\frac{y^2}{2}$，则 $dt = -ydy$，$y^2 = -2t$）：

$$\int y^3e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \int(-2t)e^t(-dt) = 2\int te^tdt = 2(t-1)e^t + C$$

$$= 2\left(-\frac{y^2}{2} - 1\right)e^{-\frac{y^2}{2}} + C = -(y^2+2)e^{-\frac{y^2}{2}} + C$$

故 $xe^{-\frac{y^2}{2}} = -(y^2+2)e^{-\frac{y^2}{2}} + C$，整理得通解：

$$x = Ce^{\frac{y^2}{2}} - y^2 - 2$$

□

例题 2.9: 微分方程求解 (9) 求微分方程的通解：$y' = \frac{1}{xy+x^2y^3}$

解答. 同样取倒数，视为 x 关于 y 的方程：

$$\frac{dx}{dy} = xy + x^2y^3 \implies \frac{dx}{dy} - yx = y^3x^2$$

这是一个关于 x 的 Bernoulli 方程 ($n = 2$)。方程两边同除以 x^2：

$$x^{-2}\frac{dx}{dy} - yx^{-1} = y^3$$

令 $u = x^{-1}$，则 $\frac{du}{dy} = -x^{-2}\frac{dx}{dy}$。代入得一阶线性方程：

$$-\frac{du}{dy} - yu = y^3 \implies \frac{du}{dy} + yu = -y^3$$

积分因子为 $\mu(y) = e^{\int y\,dy} = e^{\frac{y^2}{2}}$。两边同乘积分因子并积分：

$$\left(ue^{\frac{y^2}{2}}\right)' = -y^3e^{\frac{y^2}{2}}$$

$$ue^{\frac{y^2}{2}} = \int -y^3e^{\frac{y^2}{2}}dy = (2-y^2)e^{\frac{y^2}{2}} + C$$

得到 $u = Ce^{-\frac{y^2}{2}} + 2 - y^2$。将 $u = \frac{1}{x}$ 代回得到通解：

$$x = \frac{1}{Ce^{-\frac{y^2}{2}} + 2 - y^2}$$

□

例题 2.10: 微分方程求解 (10) 求满足初值条件的特解：$yy'' + (y')^2 = 0$，$y(0) = 1$，$y'(0) = \frac{1}{2}$

解答. 观察方程左侧，易发现它是全导数：

$$(yy')' = yy'' + y' \cdot y' = yy'' + (y')^2 = 0$$

两边积分一次得到：

$$yy' = C_1$$

代入初值条件 $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$：

$$1 \cdot \frac{1}{2} = C_1 \implies C_1 = \frac{1}{2}$$

于是有 $y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$。分离变量并积分：

$$ydy = \frac{1}{2}dx \implies \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x + C_2 \implies y^2 = x + 2C_2$$

代入初值条件 $y(0) = 1$ 确定 C_2：

$$1^2 = 0 + 2C_2 \implies 2C_2 = 1 \implies y^2 = x + 1$$

由于 $y(0) = 1 > 0$，所以取正分支，特解为：

$$y = \sqrt{x + 1}$$

□

2.3 附录：积分因子是否为初等积分法的底层逻辑？

知识 2.3: 积分因子

很多同学在学习了各种解法后会产生一个深刻的疑问：**通过积分因子转化为全微分，是否就是初等积分法最本质的逻辑？**

答案是**肯定的**。如果跳出微积分的计算细节，初等积分法中所有看似眼花缭乱的“代数变形”，本质上都是在做同一件事：**寻找一个合适的积分因子，凑全微分**。

我们可以把一阶常微分方程统一定义如下：

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

几何上，这定义了平面上的一个线素场（方向场）。求解微分方程，就是要寻找一族曲线，使得曲线上每一点的切线都与该场重合。如果这族曲线可以表示为某个二元函数的等高线 $U(x, y) = C$，那么必然有全微分 $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0$。

但现实是残酷的，绝大多数情况下，给定的 $Mdx + Ndy$ 并不是一个精确的微分（即交叉偏导数 $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$）。它就像一个“有旋”的物理场，根本不存在全局的势能函数。

此时，**积分因子 $\mu(x, y)$ 闪亮登场**。方程两边同乘一个非零标量函数 $\mu(x, y)$ 绝不会改变原有的方向场，但它能在代数结构上扭转乾坤，强行将“有旋”抹平：

$$d(\mu Mdx + \mu Ndy) = 0 \qquad \left(\text{即满足}\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\right)$$

一旦满足这个条件，由 Poincaré 引理，在单连通区域内必定存在势函数 $U(x,y)$ 使得 $dU=\mu Mdx+\mu Ndy$。方程解决。

重新审视我们的"工具库"，你会发现它们全都是全微分与积分因子法的特例：

- **可分离变量方程** $g(y)dy-f(x)dx=0$：它不需要积分因子（或者说积分因子 $\mu\equiv 1$）。因为它天然就是闭形式，势函数直接就是 $\int g(y)dy-\int f(x)dx=C$。
- **一阶线性方程** $y'+p(x)y=q(x)$：我们死记硬背的公式 $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$，正是其只依赖于自变量 x 的积分因子。乘上它，方程左边立刻化为全微分 $d(\mu y)$。
- **齐次方程与伯努利方程**：那些巧妙的变量代换（如 $u=y/x$ 或 $z=y^{1-n}$），其几何本质是**坐标变换**。在原坐标 (x,y) 下方程的积分因子可能极其复杂，但通过拉伸或扭曲坐标轴，方程在新坐标系下退化成了可分离变量或线性方程，从而获得了极其简单的显式积分因子。

【评论】"解一阶常微分方程"与"寻找积分因子"是完全等价的命题。只要你能找到 $\mu(x,y)$，方程就算彻底解开。那为什么我们不全用积分因子法呢？因为要求解积分因子所必须满足的偏微分方程 $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$，往往比解原常微分方程还要困难一万倍。我们所学的这些初等方法，不过是前人在无尽的黑夜中，碰巧捡到的几块恰好能轻易求出积分因子的石头罢了。

3 解的存在唯一性

3.1 寻找那条注定的轨迹

【课前评述】在微积分中，我们习惯了只要给出一个算式就能算出结果。但当我们面对常微分方程时，我们其实是在面对一个包含着未知函数的"规则"。在着手用各种技巧解方程之前，数学的严谨性要求我们首先必须回答一个直击灵魂的问题：**满足这条规则的演化轨迹，真的存在吗？如果存在，它是唯一的吗？**

翻开课本，数学家们用一个宏伟的定理回答了这个问题：

定理 3.1: 常微分方程解的存在唯一性

考虑一阶初值问题：

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

如果函数 $f(x,y)$ 在包含点 (x_0,y_0) 的某个矩形区域 R 内满足：

1. **连续性**：$f(x,y)$ 在 R 上连续；
2. **Lipschitz 条件**：$f(x,y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件，即存在常数 $L>0$，使得对

任意 $(x, y_1), (x, y_2) \in R$，都有：

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

那么，该初值问题在 x_0 的某个局部区间内，**存在且仅存在唯一**的解 $y = y(x)$。

【开启降维之旅】书本上给出了这个定理严密的分析学证明，它依赖于构造积分方程和皮卡序列。但比起死记硬背证明步骤，今天我们要带大家探寻这个定理背后的真正灵魂——**压缩映射原理（Banach 不动点定理）**。

为了让大家真正看透这个深邃的无穷维定理，我们先不看微分方程，而是把维度降到最低。我们将从最简单的一维实数轴出发，经历一次跨越空间的“升维之旅”，最终亲手揭开它神秘的面纱。

3.2 空间维数：从一到无穷大推广

【课前评述】今天我们将见证分析学中极其震撼的一幕：一个简单的迭代不等式，如何突破维度的限制，从实数轴跨越到无穷维函数空间。这就是现代数学的灵魂——Banach 不动点定理。我们将看到，无论是解一个方程，还是寻找一个物理世界的演化轨迹，本质上都是在寻找那个“命定”的不动点。

只需要知道压缩映射必有不动点就完事，完备度量空间具体定义是什么无需知道。

定理 3.2: 不动点定理

定理内容：
设 (X, d) 是一个**完备度量空间**，映射 $T: X \to X$ 是一个**压缩映射**，即存在常数 $0 \le L < 1$，使得对于空间中任意两个元素 $x, y \in X$，都有：

$$d(T(x), T(y)) \le L \cdot d(x, y)$$

那么，映射 T 在 X 中存在**唯一的不动点** x^*，满足 $T(x^*) = x^*$。
并且，对于空间中**任意**初始点 $x_0 \in X$，通过迭代公式 $x_{n+1} = T(x_n)$ 构造的序列 $\{x_n\}$，必定收敛于该唯一的不动点 x^*，并且是指数衰减。

【给高数同学的通俗解读】

- ⋆ **什么是“完备度量空间”？**
  “度量空间”是指定义了“距离 d”的集合，它可以是实数轴、三维空间，也可以是**函数的集合**（衡量两个函数有多接近）。“完备”则是指这个空间没有“漏洞”，保证了无限逼近的序列最终一定能落在这个空间里的某个实实在在的点上。

- ⋆ **什么是“压缩”？（著名的“地图直觉”）**

想象你手里有一张按比例缩小的北京市地图（比例尺 $L < 1$），你把这张地图平铺在北京市中心的地面上。因为是缩小版的地图，地图上任意两个地点的距离，一定严格小于真实地面上这两个地点的距离。这就是 “压缩”。

★ **定理的震撼之处在哪里？**

Banach 定理告诉我们一个极具哲学意味的事实：只要你的加工机器 T 具有“压缩”误差的性质，那么**无论你一开始的猜测 x_0 有多离谱**（哪怕你初始函数猜的是 $y = 1$ 或者 $y = 10000$），只要你坚持不懈地把它放进机器里迭代，误差就会以指数级衰减。

> **例题 3.1:** 一维代数方程的迭代求解　证明方程 $x = \frac{1}{2}\cos x$ 在实数范围内有且仅有一个实根。

解答. **1. 构造迭代映射**

令映射 $T(x) = 0.5\cos x$。原方程 $x = 0.5\cos x$ 的解，完全等价于寻找该映射的 “不动点”（即经过映射后位置保持不变的点），使得 $x = T(x)$。我们任取一个初始猜测值 $x_0 \in \mathbb{R}$，按规则不断迭代，构造序列：$x_{n+1} = T(x_n)$。

2. 验证压缩性质

对任意两个实数 $x, y \in \mathbb{R}$，不妨设 $x < y$，根据拉格朗日中值定理，在区间 (x, y) 内必定存在一点 ξ，使得：

$$|T(x) - T(y)| = |0.5(\cos x - \cos y)| = |0.5(-\sin\xi)\cdot(x - y)|$$

因为对于所有的 ξ 都有 $|\sin\xi| \le 1$，所以我们得到：

$$|T(x) - T(y)| \le 0.5|x - y|$$

这里我们找到了一个严格小于 1 的常数 $L = 0.5$。这意味着，任意两个实数经过 T 映射后，它们之间的距离至少缩短了一半。这正是**严格压缩映射**的定义。

3. 证明收敛性（构造 Cauchy 序列）

既然每次迭代距离都会缩短，我们来看看相邻两项的距离：

$$|x_{n+1} - x_n| = |T(x_n) - T(x_{n-1})| \le L|x_n - x_{n-1}|$$

像多米诺骨牌一样不断递推下去，可以一直追溯到最开始的两项：

$$|x_{n+1} - x_n| \le L^n|x_1 - x_0|$$

现在，对于任意正整数 $m > n$，我们利用三角不等式（把中间所有的步长距离都加起来）来估算它们之间的总误差：

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &\le |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\le \left(L^{m-1} + L^{m-2} + \cdots + L^n\right)|x_1 - x_0|\end{aligned}$$

提取公因子 L^n，括号里就是一个公比为 L 的等比数列求和。为了方便，我们直接将其放缩为无穷等比数列：

$$|x_m - x_n| \le L^n\left(1 + L + L^2 + \dots\right)|x_1 - x_0| = \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$$

关键的一步来了：因为压缩系数 $L = 0.5 < 1$，当 $n \to \infty$ 时，$L^n \to 0$。这意味着只要 n, m 足够大，序列中任意两项的距离可以任意小。根据高等数学中的**实数系完备性（柯西收敛准则）**，序列 $\{x_n\}$ 必定收敛于实数轴上的某个确定的数 x^*。

4. 证明解的存在性与唯一性

存在性：既然极限 x^* 存在，且 $T(x) = 0.5\cos x$ 是连续函数，我们对迭代式 $x_{n+1} = T(x_n)$ 两边同时取极限 $n \to \infty$：

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \implies x^* = T(x^*)$$

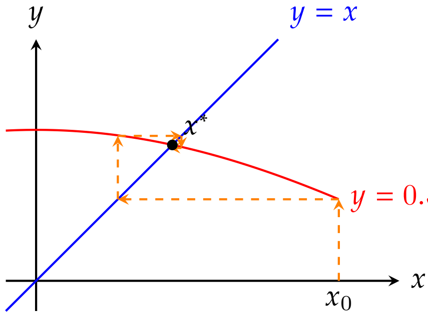
故 x^* 确实满足原方程，解是存在的。

唯一性：假设方程还有另外一个"野生"的解 y^*，即 $y^* = T(y^*)$。那么我们计算这两个解的距离：

$$|x^* - y^*| = |T(x^*) - T(y^*)| \le 0.5|x^* - y^*|$$

把不等式右边移项，得到 $0.5|x^* - y^*| \le 0$。因为绝对值不可能为负数，所以必然有 $|x^* - y^*| = 0$，即 $x^* = y^*$。至此，我们完美证明了该方程不仅存在解，而且是全宇宙唯一的实数解！

【几何直觉：蜘蛛网图轨迹】我们可以通过下述图形观察迭代点如何被"吸"向交点：



□

知识 3.1: 地图定理与高维压缩

地图定理：想象你把一张北京地图平铺在广场地面上。只要地图是真实世界的缩小版（压缩映射），那么地图上**必定存在唯一一个点**，它所代表的真实地理位置，刚好和它此时在地面上触碰的那个点完全重合。这一结论在 n 维向量空间中依然成立。

例题 3.2: *矩阵方程组的唯一性* 如果矩阵 (a_{ij}) 满足 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 < 1$，证明方程组 $\xi_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j = b_i$ 有唯一解。

解答. **1. 向量化表示**：令 $\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$。定义映射 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$。

2. 验证范数压缩：使用欧氏范数 $\|\cdot\|$，对于任意两向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$：

$$\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\| = \|A(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，可以证明：

$$\|A(\mathbf{x}-\mathbf{y})\| \le \sqrt{\sum\sum a_{ij}^2}\cdot\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = L\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

由于 $L<1$，故在高维空间 $\mathbb{R}^n$ 中，映射依然是压缩的。

3. 结论：由于 $\mathbb{R}^n$ 是完备的，根据 Banach 定理，方程组必有唯一解 $\mathbf{x}^*$。 □

> **例题 3.3:** *存在唯一性定理的核心证明（不动点视角）* 考虑初值问题 $y'=f(x,y), y(x_0)=y_0$。假设 $f(x,y)$ 连续，且对 y 满足 Lipschitz 条件：存在常数 $L>0$，使得 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$。试利用 Banach 不动点定理，简明推导该初值问题在局部区间内解的存在唯一性。

解答. **第一步：转化为算子不动点问题**

对方程两边从 x_0 到 x 积分，微分方程初值问题完全等价于积分方程：

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt$$

我们在连续函数空间上定义一个积分映射（算子）T：

$$T(y)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt$$

寻找微分方程的解，就等价于寻找这个映射的“不动点”，即寻找一个函数 $y(x)$ 满足 $y=T(y)$。

第二步：在局部区间证明压缩性质

我们在初始点附近取一个小区间 $I=[x_0-h,x_0+h]$。对于定义在 I 上的任意两个连续函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，计算它们映射后的距离：

$$|T(y_1)(x)-T(y_2)(x)| = \left|\int_{x_0}^{x}\left[f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))\right]dt\right|$$

利用积分的绝对值不等式和 Lipschitz 条件：

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} L|y_1(t)-y_2(t)|\,dt\right| \le L\cdot|x-x_0|\cdot\max_{t\in I}|y_1(t)-y_2(t)|$$

在连续函数空间中，两函数的距离定义为最大绝对误差 $d(y_1,y_2)=\max_{t\in I}|y_1(t)-y_2(t)|$。因为 $x\in I$，故 $|x-x_0|\le h$，于是有：

$$d(T(y_1),T(y_2))\le (Lh)\cdot d(y_1,y_2)$$

只要我们把观察的区间取得足够小，使得 $h<\frac{1}{L}$，那么比例常数 $\alpha=Lh<1$。此时，映射 T 在该小区间上就是一个严格的**压缩映射**。

第三步：一锤定音（应用定理）

由于闭区间上的连续函数空间构成一个完备的度量空间，根据 Banach 不动点定理（压缩映射原理），映射 T 必定存在**唯一**的不动点 $y^*(x)$。这从根本上证明了：只要区间足够小，该初值问题的解必然存在，且绝对唯一。 □

“数学的艺术在于找到一个特例，
其中隐含了所有推广的胚芽。”

——希尔伯特 (D. Hilbert)

3.3 定理的反面

例题 3.4: 失去 Lipschitz 条件的代价：Peano 反例 求解初值问题：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

并讨论其解的唯一性。

解答. **第一步：寻找平凡解**
观察原方程，如果令 $y(x) \equiv 0$，那么方程左边 $y' \equiv 0$，右边 $3(0)^{\frac{2}{3}} = 0$，等式显然成立。且 $y(0) = 0$ 满足初始条件。因此，我们找到了一个解：

$$y_1(x) \equiv 0$$

第二步：利用分离变量法寻找非平凡解
假设 $y \neq 0$，对原方程分离变量并积分：

$$y^{-\frac{2}{3}}\,dy = 3\,dx \implies 3y^{\frac{1}{3}} = 3x + C$$

代入初值 $y(0) = 0$，得到 $C = 0$。两边立方，于是我们找到了另一个解：

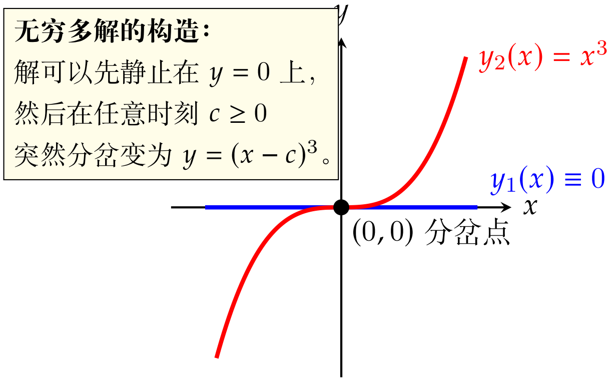
$$y_2(x) = x^3$$

第三步：诊断唯一性破缺的原因
同一个初值问题，竟然有完全不同的解从原点出发（实际上，通过拼接，我们可以构造出无穷多个解）！为什么 Picard-Lindelöf 定理在这里保护不了唯一性？

我们来检查方程右端的非线性项 $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$。计算它关于 y 的偏导数：

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$$

当初始点 $y \to 0$ 时，这个偏导数**趋于无穷大（发散）**！这意味着在原点 $(0, 0)$ 附近，$f(x, y)$ 变化得极其剧烈，我们根本无法找到一个有限的常数 L 来约束它的斜率边界，**Lipschitz 条件彻底失效**。映射失去了“压缩”的性质，皮卡迭代无法收敛到唯一的不动点，解的轨迹在原点发生了不可预测的“分岔”。



□

3.4 存在唯一性之外

【课前评述】大家刚刚学完了初等积分，目前我们对积分的认识主要停留在“计算图形面积”或“求已知函数的原函数”。但今天，我们要见识积分的另一种极其强大的威力：**利用积分来“生长”出我们未知的函数**。我们将一窥现代数学中证明微分方程解的存在唯一性的核心思想——**Banach 不动点定理（皮卡迭代法）**。

例题 3.5: 化微分为积分：寻找“不动点” 考虑最简单的初值问题：寻找一个函数 $y(x)$，使得其导数等于自身，且过点 $(0,1)$。

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解答. **第一步：视角的转换（微分方程 → 积分方程）**
直接解微分方程，我们是在寻找一个未知的函数。但如果我们对等式两边同时从 0 到 x 进行**定积分**：

$$\int_0^x y'(t)\,dt = \int_0^x y(t)\,dt$$

根据微积分基本定理，左边等于 $y(x)-y(0)$，代入 $y(0)=1$，我们得到：

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t)\,dt$$

【核心眼光】此时，我们不再把等号右边看作一个简单的算式，而是看作一个**“加工机器（算子映射）”**。设这个机器为 T，如果你往机器里丢进一个函数 $f(t)$，机器就会进行积分加工，吐出一个新的函数：

$$T(f)(x) = 1 + \int_0^x f(t)\,dt$$

那么，原方程 $y(x)=1+\int_0^x y(t)\,dt$ 的含义就变成了：我们要求一个特殊的函数 $y(x)$，使得它被机器 T 加工后，**吐出来的依然是它自己**！即：

$$y = T(y)$$

在数学上，满足这种条件的 y 被称为映射 T 的 **“不动点（Fixed Point）”**。

第二步：如何找到不动点？(不断迭代逼近)
著名的 Banach 不动点定理告诉我们：只要这个机器（映射）满足一定的“压缩”性质，无论我们一开始随便扔一个什么初始函数进去，只要不断地把吐出来的结果再重新扔回机器里循环加工，它最终必定会收敛到那个唯一的不动点！

我们来亲自实践一下。随便猜一个最简单的初始函数，比如常数函数 $y_0(x) = 1$。将其扔进积分机器，得到第一次迭代结果 $y_1(x)$：

$$y_1(x) = T(y_0) = 1 + \int_0^x 1\,dt = 1 + x$$

把 $y_1(x)$ 扔回机器，得到第二次迭代结果 $y_2(x)$：

$$y_2(x) = T(y_1) = 1 + \int_0^x (1+t)\,dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

继续把 $y_2(x)$ 扔回机器，得到第三次迭代结果 $y_3(x)$：

$$y_3(x) = T(y_2) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

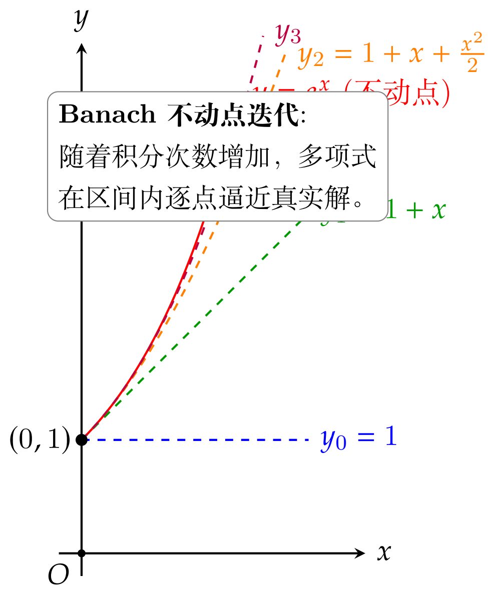
以此类推，进行 n 次积分迭代后，我们得到了一个多项式：

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

第三步：见证奇迹的时刻
随着迭代次数 $n \to \infty$，这个多项式正是自然指数函数 e^x 的泰勒展开式！所以，这个不断循环的积分序列，最终收敛于：

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = e^x$$

而 e^x 正是原初值问题 $y' = y, y(0) = 1$ 的唯一解！



□

例题 3.6: 非线性方程的皮卡迭代与“局部性”危机 求初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的前三次皮卡迭代式，并将其与方程的精确解进行对比。试从分析学的角度，讨论该解的“生命周期”（存在区间）为何是受限的。

解答. **第一步：构造皮卡迭代序列**
对应于该初值问题的等价积分方程为：$y(x) = 1 + \int_0^x y^2(t)\,dt$。我们取常数函数作为零次近似：$y_0(x) \equiv 1$。将 y_0 代入积分算子，得到第一次近似：

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1^2\,dt = 1 + x$$

继续迭代，将 y_1 代入算子，得到第二次近似：

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t)^2\,dt = 1 + \int_0^x (1 + 2t + t^2)\,dt = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3}$$

再进行第三次近似（你可以感受到非线性平方项带来的代数膨胀）：

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3}\right)^2 dt = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{2x^4}{3} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^6}{9} + \frac{x^7}{63}$$

第二步：求解精确解与“生长”的级数
原方程 $y' = y^2$ 极其简单，它是一个可分离变量方程：$y^{-2}dy = dx$。两边积分得 $-y^{-1} = x + C$。代入初始条件 $y(0) = 1$，得到 $C = -1$。因此，该初值问题在实数域上的精确解为：

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

如果我们把这个精确解在 $x = 0$ 处展开为泰勒级数（即常见的几何级数）：

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (|x| < 1)$$

此时，极其震撼的一幕出现了！对比刚才算出的皮卡序列：$y_1(x)$ 完美命中了精确解的前两项；$y_2(x)$ 完美命中了前三项；$y_3(x)$ 完美命中了前四项。**皮卡迭代不仅仅是在抽象的函数空间中逼近不动点，在代数层面上，它实质上正在自动“生长”出真实解的麦克劳林展开式！**

第三步：局部性危机的深刻反思（Blow-up）
为什么 Picard 定理一定要强调解只在**“局部区间”**内存在？

我们来审视非线性项 $f(x,y) = y^2$。虽然它在整个平面上处处连续，但它**并不满足全局的 Lipschitz 条件**。因为偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$，当 $y \to \infty$ 时，其变化率是没有上限的（无界）。它只能在包含初始点 $(0,1)$ 的某个有限矩形内满足局部的 Lipschitz 条件。

观察我们的精确解 $y(x) = \frac{1}{1-x}$，当 $x \to 1^-$ 时，$y \to +\infty$。演化轨迹在有限的时间 $x = 1$ 处发生了**爆破 (Blow-up)**，飞向了无穷大。这意味着这个解的“生命周期”只能维持在区间 $(-\infty, 1)$，无法延拓到整个实数轴。

【评论】这就是非线性动力系统中最迷人也最危险的特征：即使初始状态完美、演化规则光滑，非线性项 y^2 所带来的正反馈也会导致系统在有限的时间内彻底崩溃。这也反向证明了，我们在推导 Picard 定理时，将 x 限制在极小的区间 h 内，并非是分析学上的怯懦，而是对客观世界非线性规律的最高敬畏。 $\square$